

Lezione 22: Il modello di gas ideale

22.1. Che cosa ci proponiamo di fare

Abbiamo detto che i gas sono fatti di molecole molto distanti tra di loro, che si muovono incessantemente, occupando così tutto il volume a loro disposizione.

L'energia cinetica delle molecole del gas è, come vedremo, un elemento molto importante nello studio che ci proponiamo di fare. Come ricorderete essa dipende dalla massa delle molecole e dal quadrato della loro velocità: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

Sappiamo inoltre che i gas esercitano una pressione sulle pareti del recipiente dentro al quale sono rinchiusi: maggiore è la quantità di gas che mettete nel recipiente, maggiore sarà la pressione esercitata. È quello che succede quando si gonfia la gomma di una bicicletta: si introduce più aria, la pressione aumenta, il pneumatico si irrigidisce.

In questa lezione vogliamo provare a interpretare questi fatti, costruendone un modello. Un modello, nel linguaggio della fisica, è una rappresentazione semplificata della realtà che stiamo indagando: è semplice abbastanza da permetterci di fare dei conti, quindi delle previsioni. Il modello, proprio perché è una rappresentazione semplificata della realtà, ci permette di prevedere alcuni aspetti della situazione reale, ma non tutti. Dobbiamo quindi conoscere i limiti dei modelli che costruiamo, per sapere quando possiamo usarli e quando no.

Il modello di gas ideale che svilupperemo in questa lezione è in grado di dare buone spiegazioni riguardo al comportamento dei gas reali, quando questi non sono troppo compressi, cioè quando le loro molecole non diventano troppo vicine.

22.2. Il modello di gas ideale

La semplificazione che si introduce nel modello consiste nel trascurare la debole forza attrattiva che esiste tra le molecole del gas e nel considerare infinitamente grande la forza repulsiva che agisce tra di esse. In questo modo le molecole del gas si comportano come se fossero oggetti indeformabili: quando si scontrano, cozzano fra loro e rimbalzano via, ma quando sono lontane non c'è nessuna forza fra di esse. Se poi il gas è contenuto in un recipiente, anche la forza tra le molecole delle pareti del recipiente e quelle del gas è dello stesso tipo: quindi sarà sufficiente considerare urti e rimbalzi delle molecole del gas contro le pareti!

Infine assumiamo che le molecole del gas ideale siano indeformabili e possiedano un'energia cinetica che possono cedere ad altre molecole in un urto. Ma l'energia cinetica si conserva: se una molecola, urtandone un'altra, viene rallentata, l'altra molecola dovrà prendere l'energia cinetica persa dalla prima e si muoverà più in fretta dopo l'urto. In media il movimento delle molecole si trasmetterà da una molecola

all'altra, ma non si esaurirà mai. Molecole più veloci, dopo qualche urto diventeranno più lente, molecole più lente diventeranno più veloci, in un turbinio senza fine.

22.3. La pressione nei gas

Abbiamo visto nella lezione 11 che la grandezza pressione è definita come la forza esercitata su una superficie, divisa per l'area della superficie:

$$\text{pressione} = \text{forza} / \text{area della superficie}$$

Questa è la definizione generale di pressione e non è ristretta ai gas, ma vale in ogni situazione in cui qualcosa preme su una superficie. Noi ci occuperemo qui della pressione esercitata da un gas sulle pareti del recipiente che lo contiene.

Qual è l'origine di questa pressione? Immaginiamo che il gas sia racchiuso in un contenitore cubico (► fig.22.1). In ogni urto contro una parete, una molecola cambia la direzione del proprio moto, quindi cambia la quantità di moto della molecola che lo subisce.

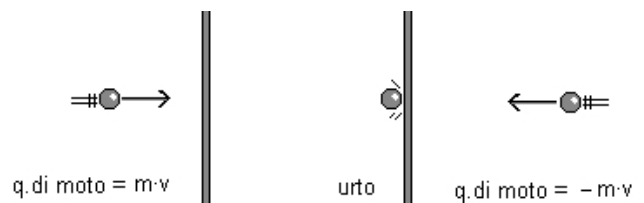


Fig.22.1. Un urto frontale contro una parete.
La molecola che urta cambia la propria quantità di moto di $-2 \cdot m \cdot v$

Se l'urto è frontale, cioè se la molecola si muove perpendicolarmente alla parete, il cambiamento è facile da calcolare. La velocità prima dell'urto era v , e perciò la quantità di moto era $m \cdot v$, dopo l'urto la velocità è $-v$ e perciò la quantità di moto è diventata $-m \cdot v$. L'urto ha fatto cambiare la quantità di moto da $m \cdot v$ a $-m \cdot v$.

Sappiamo, dalla lezione 13, che la quantità di moto cambia quando c'è una forza che esercita un impulso: la quantità di moto della molecola cambia perché la parete esercita un impulso su di essa. Naturalmente è vero anche l'inverso: la molecola esercita un impulso sulla parete, cioè una forza per un certo tempo.

Ciò che noi chiamiamo pressione non è altro che l'effetto macroscopico delle forze che le molecole esercitano sulle pareti durante gli urti.

Se l'urto dura un tempo Δt sappiamo anche calcolare l'intensità della forza con cui interagiscono la molecola e la parete:

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \frac{2v}{\Delta t}$$

dove m è la massa della molecola.

22.4. Una previsione azzeccata

Se la pressione del gas è data dagli urti delle sue molecole sulle pareti, allora aumentando il numero di molecole di gas nel recipiente, cioè immettendo gas, la pressione deve aumentare: ma questo è proprio uno dei fatti che ci siamo proposti di spiegare costruendo il modello!

Il modello ci permette di fare un'altra previsione: se noi diminuiamo il volume complessivo a disposizione delle molecole, queste urteranno più spesso le pareti perché avranno meno spazio per muoversi. Pertanto ci aspettiamo che una compressione del gas (cioè una diminuzione di volume) faccia aumentare la pressione. E ciò accade veramente!

22.5. Dove andiamo a parare

Il resto di questa lezione è difficile. Per evitare il rischio che vi perdiate nei conti, vogliamo anticiparvi subito il risultato che otterremo.

Il modello di gas ideale prevede che il prodotto tra la pressione di un gas e il suo volume sia proporzionale all'energia cinetica media delle sue molecole,

$$\text{e precisamente che } PV = \frac{2}{3} N \langle E_c \rangle .$$

Nell'equazione precedente P è la pressione, V il volume, N il numero di molecole, $\langle E_c \rangle$ la loro energia cinetica media, cioè la somma delle energie cinetiche di tutte le molecole, divisa per il numero di molecole.

22.6. Le grandezze che usiamo

Indichiamo con N il numero delle molecole e con m la loro massa: facciamo perciò l'ipotesi che le molecole siano tutte dello stesso tipo.

La velocità di una molecola che si muove nello spazio è un vettore con tre componenti, vale a dire $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Se indichiamo con v il modulo del vettore velocità, possiamo calcolare v usando il teorema di Pitagora in tre dimensioni:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

22.7. Calcoliamo la pressione

Abbiamo visto che una molecola di massa m e velocità v , che nel tempo Δt urta frontalmente una parete, esercita su di essa una forza di intensità $F = m \frac{2v}{\Delta t}$. Se

l'urto non è frontale (► fig.22.2) cambia solo la componente di velocità perpendicolare alla parete: $F_x = m \frac{2v_x}{\Delta t}$

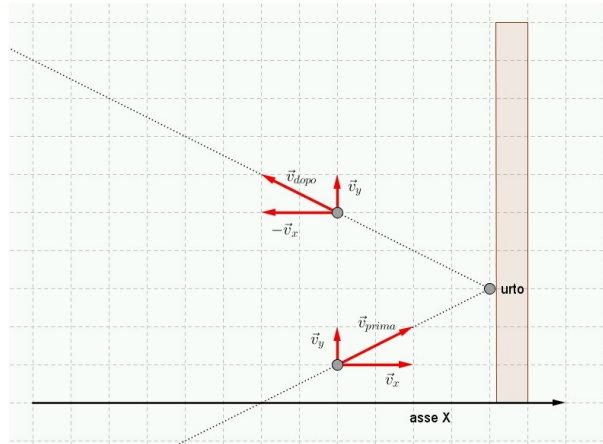


fig.22.2 Se la molecola urta una parete perpendicolare alla direzione x, la componente v_x cambia segno, le altre componenti non cambiano

Il problema è dunque: quante molecole urtano la parete nel tempo Δt ? Risposta: solo quelle che si trovano in una fetta di recipiente larga $v_x \cdot \Delta t$ (► fig.22.3). Le altre sono troppo lontane dalla parete, e la colpiranno più tardi.

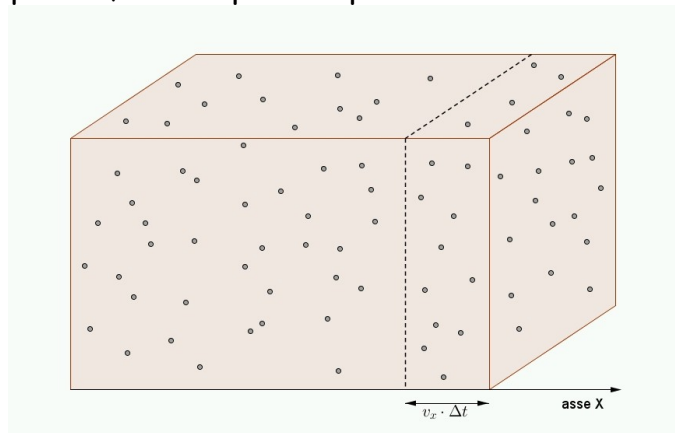


fig.22.3 le molecole che nel tempo Δt colpiscono la parete di destra sono quelle comprese nella fetta di spessore $v_x \cdot \Delta t$

Se indichiamo con A l'area della superficie sulla quale vogliamo calcolare la pressione, il volume di questa fetta è $v_x \cdot \Delta t \cdot A$. Se le molecole sono distribuite in modo uniforme in tutto il recipiente, allora il numero di molecole N_M contenute nella fetta è una frazione del numero totale N :

$$N_M = N \frac{V_{fetta}}{V} \quad \text{quindi} \quad N_M = \frac{N v_x \Delta t A}{V}$$

Di queste N_M molecole, solo la metà viaggia verso destra e colpisce la parete. L'altra metà viaggia verso sinistra e se ne allontana. Quindi il numero di urti nel tempo Δt è $\frac{N v_x \Delta t A}{2V}$, e la forza complessiva esercitata sulla parete è:

$$F_x = m \frac{2v_x}{\Delta t} \cdot \frac{Nv_x \Delta t A}{2V} = \frac{mNv_x^2 A}{V}$$

La pressione P esercitata dal gas si trova dividendo la forza complessiva per l'area A della parete, quindi:

$$P = \frac{F_x}{A} = \frac{Nm v_x^2}{V}$$

22.8. Mediare per rimediare

Nel calcolo che abbiamo fatto c'è un errore, anzi due!

Innanzitutto abbiamo fatto i calcoli come se tutte le molecole si muovessero avanti e indietro soltanto in direzione x , inoltre abbiamo trattato le molecole come se tutte avessero la stessa velocità, mentre sappiamo che a causa dei continui urti alcune molecole perdono di velocità, altre ne acquistano, in un turbinio incessante e casuale.

Al secondo errore possiamo rimediare considerando il valore medio di v_x^2 , che indichiamo con il simbolo $\langle v_x^2 \rangle$. Otteniamo quindi:

$$P = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{V}$$

Ancora un ultimo sforzo, perché dobbiamo calcolare quanto vale $\langle v_x^2 \rangle$. Le molecole non hanno alcuna ragione per preferire la direzione x alla direzione y , oppure alla z : se le molecole si muovessero in direzione x più velocemente che nelle altre, ciò produrrebbe una sorta di "vento" in direzione x che naturalmente non esiste affatto. Questo significa che:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

Ma siccome $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, concludiamo che:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$$

E quindi:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

Abbiamo scoperto in definitiva che:

$$P = \frac{1}{3} \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{V}$$

Quest'ultima equazione possiamo riscriverla così:

$$PV = \frac{2}{3} N \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{2}{3} N \langle E_c \rangle$$

giungendo infine al risultato che avevamo preannunciato.