

## Lezione 42: l'induzione elettromagnetica

## 42.1. Gli esperimenti di Faraday

L'esperimento di Oersted del 1820 dimostrò che una corrente elettrica produce un campo magnetico. Subito gli sperimentatori si domandarono se fosse vero anche il viceversa: un campo magnetico può produrre una corrente elettrica? Michael Faraday, negli anni tra il 1820 e il 1860, condusse una grande quantità di esperimenti sui fenomeni elettrici e magnetici. Due di questi sono mostrati nella prossima figura (► fig.42.1)

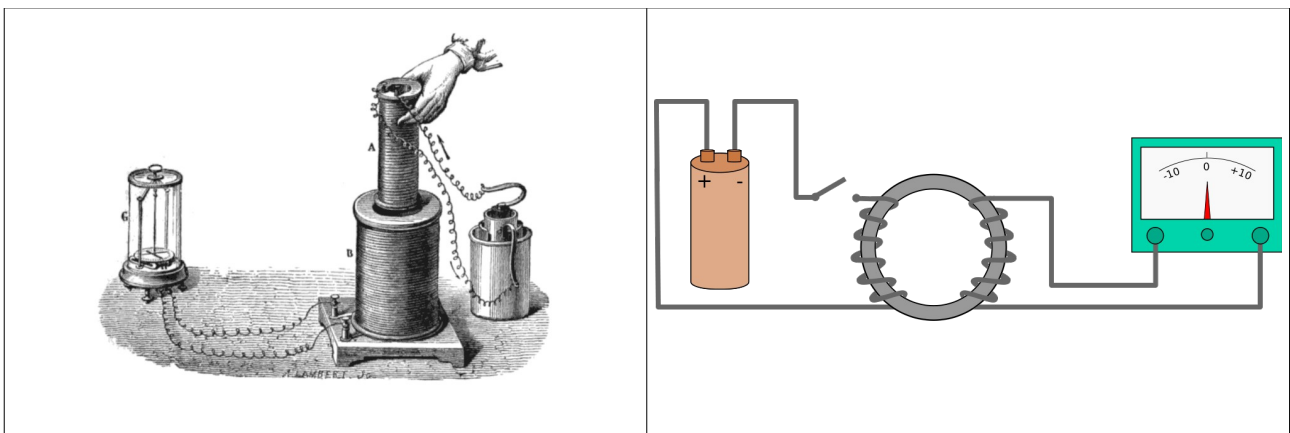


fig 42.1 due esperimenti di Faraday

Nel primo esperimento la batteria che si trova sulla destra provoca una corrente elettrica nel solenoide piccolo, indicato con A: esso quindi genera un campo magnetico. Un secondo solenoide, indicato con B, è collegato al galvanometro G, strumento in grado di misurare correnti elettriche anche di piccola intensità. Quando il solenoide A viene mosso nelle vicinanze di B, allora il galvanometro registra una corrente elettrica in B. Una corrente davvero sorprendente, visto che B non è collegato ad alcun generatore che sia responsabile del moto delle cariche al suo interno! La si definisce *corrente indotta*, per sottolineare la particolarità del meccanismo che la genera.

Due ingredienti sono necessari perché la corrente venga generata in B: il solenoide A deve creare un campo magnetico, e deve muoversi rispetto a B. Se stacciamo la batteria, allora A non crea più un campo magnetico, e il suo movimento non provoca alcuna corrente in B. Se riattacciamo la batteria, allora A provoca un campo magnetico, ma se non c'è movimento esso non genera alcuna corrente in B. Faraday si accorse che naturalmente il moto necessario alla riuscita dell'esperimento è relativo: gli effetti sono identici sia che si muova A, sia che si muova B.

Nel secondo esperimento abbiamo di nuovo due distinti avvolgimenti di filo, fatti intorno ad uno stesso anello metallico. Nel primo avvolgimento possiamo far passare corrente chiudendo l'interruttore che lo collega alla batteria sulla sinistra, nel secondo, tramite l'amperometro mostrato sulla destra, possiamo misurare la presenza

di un'eventuale corrente indotta. Il risultato è di nuovo sorprendente: la corrente passa nel secondo avvolgimento solo nei brevi istanti in cui l'interruttore viene aperto o chiuso.

Il primo esperimento descritto si può riprodurre sostituendo il solenoide A con un magnete. Anche in questo caso, naturalmente, la corrente indotta si osserva a condizione che il solenoide B sia in moto relativo rispetto al magnete. Non solo: le correnti indotte sono tanto più intense quanto più il moto relativo è rapido. Che cosa accomuna i diversi esperimenti? Faraday lo spiegava in termini di linee di campo:

*si ha corrente indotta in un circuito, quando varia nel tempo  
il numero di linee di campo magnetico che lo attraversano.*

*Quanto più rapida è la variazione, tanto più intensi sono gli effetti prodotti.*

L'idea si può precisare dal punto di vista matematico, definendo la grandezza flusso di campo magnetico.

#### 42.2. il flusso del campo magnetico

Cominciamo con un'analogia facile da comprendere: consideriamo un canale in cui l'acqua scorre in modo uniforme, con una velocità che in ogni punto ha la stessa direzione e lo stesso modulo  $v = 3 \text{ m/s}$ . Consideriamo poi un'ideale superficie piana di area  $S = 2 \text{ m}^2$ , disposta perpendicolarmente al flusso dell'acqua. Il prodotto delle due grandezze,  $v \cdot S = 3 \text{ m/s} \cdot 2 \text{ m}^2 = 6 \text{ m}^3/\text{s}$ , ha un significato evidente: rappresenta la quantità d'acqua che attraversa la superficie ogni secondo. Lo chiameremo flusso, e diremo che il flusso d'acqua attraverso la superficie ha un'intensità di  $6 \text{ m}^3/\text{s}$ . Il flusso è proporzionale alla velocità della corrente e all'area della superficie, ma dipende anche dal modo in cui la superficie è orientata: è massimo quando la superficie è perpendicolare alla corrente, diminuisce ruotandola, è nullo quando la superficie è diretta come il flusso, diventa negativo (nel senso che cambia direzione) proseguendo la rotazione della superficie.

L'idea si può generalizzare al caso in cui il campo delle velocità non è uniforme e al caso in cui la superficie non è piana: si divide la superficie in piccole porzioni quasi piane, si calcola il flusso attraverso ciascuna di esse, poi si sommano tutti i flussi. Si calcola cioè un integrale, per il quale il dominio di integrazione non è un intervallo, bensì una superficie.

La prossima figura (► fig.42.2) traduce in immagini quel che abbiamo detto fin qui. Il campo di vettori può essere un campo qualsiasi, per esempio un campo magnetico  $B$ : il flusso di  $B$  attraverso una superficie  $S$ , piana e perpendicolare al campo, è il prodotto  $B \cdot S$ : è proporzionale all'intensità del campo e all'area della superficie, dipende dal modo in cui la superficie è orientata.

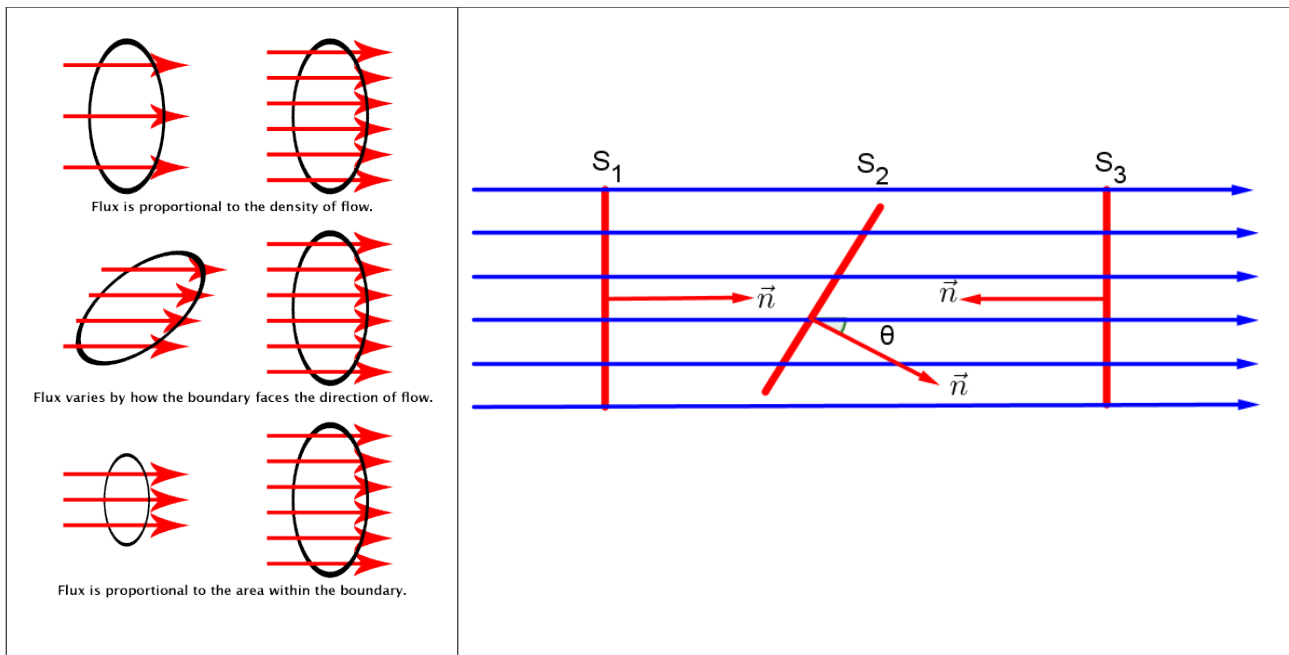


fig 42.2 il flusso di un campo attraverso una superficie

La seconda parte della figura spiega come si descrive l'orientamento della superficie. La superficie che consideriamo è un rettangolo che sta in un piano perpendicolare a quello del foglio, quindi vediamo solo il lato superiore del rettangolo. Si considera poi il vettore  $\vec{n}$  ad essa perpendicolare, la cui direzione dipende dal modo in cui la superficie è orientata: seguendo con le dita della destra il bordo della superficie, il pollice indica la direzione di  $\vec{n}$ . L'angolo tra il vettore e il campo è indicato con  $\theta$ . Il flusso  $\Phi$  si calcola in questo modo:

$$\Phi = BS\cos(\theta)$$

Le unità di misura del flusso di campo magnetico sono naturalmente tesla per metri quadrati, unità che nel SI si chiama weber, il cui simbolo è Wb:

$$1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot 1\text{m}^2 = 1 \frac{\text{N}}{\text{Am}} \cdot 1\text{m}^2 = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Js}}{\text{C}} = 1\text{V} \cdot \text{s}$$

Ci siamo divertiti a scrivere l'unità di flusso in molti modi equivalenti (provate per esercizio che lo sono per davvero!). L'ultimo modo è forse il più interessante: dice che la velocità con cui il flusso cambia nel tempo si misura in Wb/s, cioè in volt.

Tutti gli esperimenti fin qui descritti condividono questa caratteristica comune: una variazione del flusso di campo magnetico attraverso il circuito è accompagnata da un moto di cariche nel circuito stesso, cioè a una corrente elettrica indotta. Tutto funziona *come se* al circuito venisse applicata una sorgente di differenza di potenziale  $\Delta V$ , dovuta non ai fenomeni chimici che avvengono ad esempio in una pila di Volta, bensì alla variazione di flusso di campo magnetico attraverso il circuito.

## 42.3. La tensione indotta

In questo paragrafo vogliamo ricavare una formula che ci permetta di esprimere in modo quantitativo l'osservazione che abbiamo fatto alla fine del paragrafo precedente.

La prossima figura (► fig.42.3) mostra una spira di forma particolare: due guide parallele di materiale conduttore sono messe in comunicazione, all'estremità di sinistra, mediante una barretta conduttrice lunga  $H$ . Il circuito è chiuso da un'ulteriore barretta dello stesso materiale conduttore, che scorre sulle guide parallele, restando ad esse perpendicolare, spostandosi verso destra con velocità di modulo  $v$ . La spira è immersa in un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano della pagina, diretto verso l'osservatore.

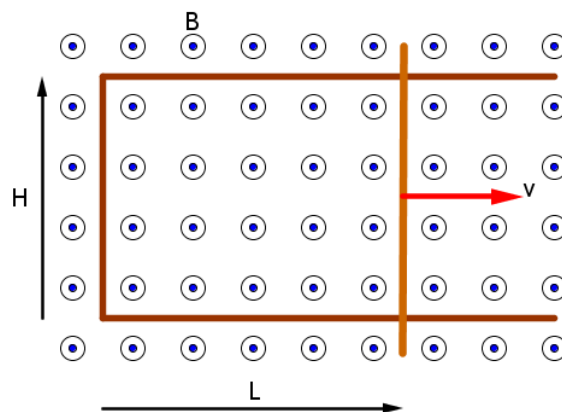


fig 42.3 un circuito attraverso il quale varia il flusso di campo magnetico

Nell'istante rappresentato in figura, la spira racchiude una superficie rettangolare di area  $S = H \cdot L$ , attraversata da un flusso  $\Phi = B \cdot S = B \cdot H \cdot L$ . Poiché  $L$  varia nel tempo, anche  $\Phi$  è una funzione del tempo, precisamente:  $\Phi(t) = B \cdot H \cdot L(t)$ . La derivata di  $\Phi$  rispetto al tempo, essendo  $H$  e  $B$  costanti, è semplicemente  $\Phi'(t) = B \cdot H \cdot L'(t) = B \cdot H \cdot v$ .

L'effetto prodotto da questa variazione di flusso può essere calcolato, in questo caso, sfruttando ciò che sappiamo sulla forza di Lorentz. Ogni portatore di carica positiva  $q$ , libero di muoversi sulla sbarretta in moto con velocità  $v$ , è sottoposto alla forza di Lorentz: provate ad usare la regola della mano destra, e vedrete che la forza è diretta verso il basso. L'intensità della forza è  $F = qvB$ , perché campo magnetico e velocità sono perpendicolari. Il tratto lungo cui questa forza agisce ha lunghezza  $H$ , quindi la forza compie un lavoro  $L = qvBH$ . Il lavoro per unità di carica, cioè la differenza di potenziale responsabile del moto dei portatori di carica, è quindi  $\Delta V = v \cdot B \cdot H$ . Insomma: tutto funziona *come se* al circuito fosse stato applicato un generatore di tensione tra i cui terminali ci sia una differenza di potenziale  $\Delta V = v \cdot B \cdot H$ . Naturalmente non c'è nessun generatore, bensì una tensione indotta.

Confrontando i risultati ottenuti negli ultimi due sottoparagrafi siamo in grado di formulare la legge che lega la variazione di flusso all'effetto elettrico che essa provoca: la differenza di potenziale indotta nella spira è uguale, in valore assoluto, alla derivata rispetto al tempo del flusso di campo magnetico attraverso una superficie che abbia la spira come bordo.

#### 42.4. La legge di Faraday - Lenz

Resta da vedere la questione del segno. Abbiamo visto che la corrente indotta circola nella spira in senso orario: ciò significa che la spira genera un campo magnetico che entra nel piano del foglio, in modo tale, quindi, da opporsi alla variazione di flusso che l'ha generata. È un fatto del tutto generale: tutte le volte che una corrente indotta circola, la sua direzione è tale da opporsi alla variazione che l'ha generata. Quest'ultimo enunciato è chiamato legge di Lenz: dal punto di vista matematico significa semplicemente aggiungere un segno meno nella legge di Faraday.

Il fatto che la corrente indotta si opponga alla variazione è conseguenza del fatto che l'energia si conserva. Se la corrente indotta circolasse al contrario, la variazione verrebbe amplificata, producendo una corrente indotta ancora più grande, che a sua volta rinforzerebbe la variazione...: otterremmo quindi energia letteralmente dal nulla, il che, come ben sappiamo, è impossibile.

Mettendo insieme le varie osservazioni fatte fin qui, siamo ora in grado di formulare la legge di Faraday - Lenz in tutta la sua semplice magnificenza:

$$\Delta V = - d\Phi/dt$$

#### 42.5. Situazione diversa, stesse conseguenze

Nella prossima figura (► fig.42.4) prendiamo in esame una situazione in cui la forza di Lorentz non agisce, ma la corrente indotta c'è, e la corrispondente differenza di potenziale si calcola con la legge di Faraday - Lenz.

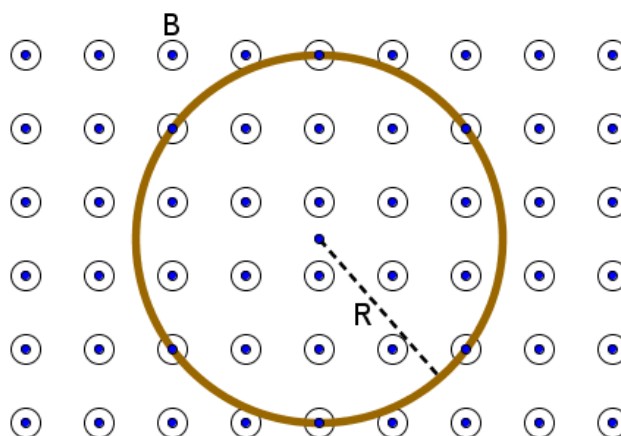


fig 42.4 la variazione di flusso è provocata dalla variazione del campo, non dal moto della spira

La forza di Lorentz non agisce perché la spira, che abbiamo scelto circolare, non si muove rispetto al campo, quindi non si muovono i portatori di carica che stanno al suo interno. Questa volta il cambiamento è dovuto al fatto che il campo magnetico  $B$ , perpendicolare al piano del foglio e diretto verso l'osservatore, ha un'intensità che cresce nel tempo: il cambiamento produce comunque una variazione di flusso, quindi una differenza di potenziale indotta.

Avremo  $\Phi(t) = \pi R^2 \cdot B(t)$ , quindi  $\Delta V = - d\Phi/dt = - \pi R^2 \cdot dB/dt$ .

Vediamo un esempio con numeri semplici: supponiamo che la spira abbia raggio  $R = 1$  m e che il campo magnetico cresca al ritmo di un tesla al secondo, ad esempio  $B(t) = t \cdot 1$  T/s. Allora:

$$S = \pi R^2 = 3.14 \text{ m}^2,$$

$$\Phi(t) = B(t) \cdot S = t \cdot 1 \text{ T/s} \cdot 3.14 \text{ m}^2 = 3.14 \text{ Wb/s} \cdot t$$

$$d\Phi/dt = 3.14 \text{ Wb/s} = 3.14 \text{ V}$$

La differenza di potenziale indotta ha un modulo di 3.14 V. Il segno meno della legge di Lenz specifica la direzione della corrente indotta: oraria, in modo da generare un campo magnetico che entra nel piano del foglio, tale perciò da opporsi all'aumento del campo magnetico che esce dal piano.

#### 42.6. L'alternatore e le correnti alternate



fig 42.5 un alternatore e uno schema di massima del suo funzionamento

La figura precedente (► fig.42.5) mette a confronto un alternatore e uno schema di massima del suo funzionamento. Cominciamo dallo schema: una spira è attraversata da un flusso di campo magnetico che varia nel tempo in modo sinusoidale, quindi è sottoposta a una differenza di potenziale che varia nel tempo in modo sinusoidale. L'oggetto reale è più complicato: invece di una spira comprende un avvolgimento di spire detto armatura, il campo magnetico è prodotto di solito da un secondo

avvolgimento di spire, il moto consiste in una rotazione relativa tra armatura e campo magnetico.

Tensioni che variano nel tempo in modo sinusoidale sono mostrate nella prossima figura (► fig.42.6). La traccia descritta con piccole linee si riferisce al caso in cui l'alternatore dello schema precedente compie una rotazione completa in 6.28 s: quindi il periodo è  $T = 6.28$  s, la pulsazione è  $\omega = 2\pi/T = 1$  s<sup>-1</sup>, l'ampiezza dell'oscillazione, indicata con  $V_0$ , rappresenta la massima differenza di potenziale ai capi della spira.

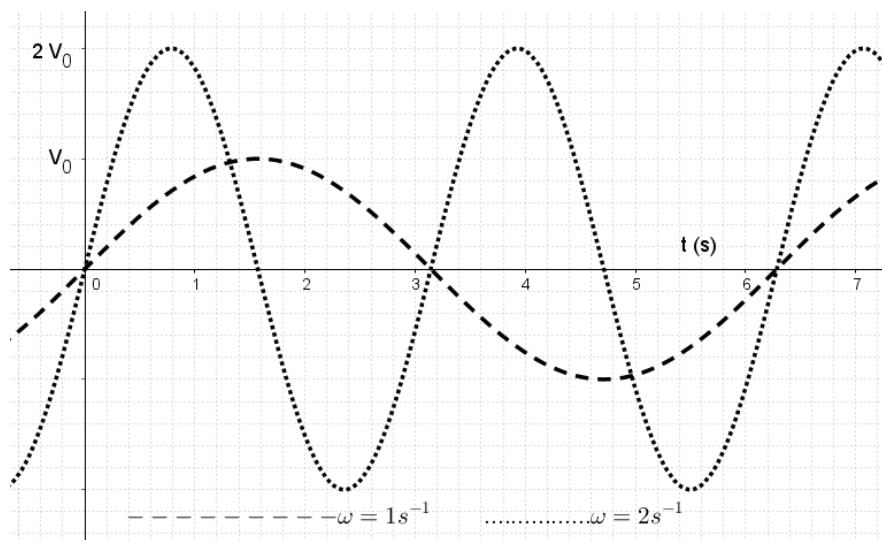


fig 42.6 differenze di potenziale alternate

La traccia punteggiata si riferisce al caso in cui lo stesso alternatore compie una rotazione completa in 3.14 s: quindi il periodo è  $T = 3.14$  s, la pulsazione è  $\omega = 2\pi/T = 2$  s<sup>-1</sup>, l'ampiezza dell'oscillazione è doppia, perché le variazioni di flusso sono due volte più rapide.

Una differenza di potenziale alternata, e la conseguente corrente alternata, si descrivono perciò con equazioni di questo tipo:

$$V(t) = V_0 \sin(\omega t) \quad e \quad i(t) = i_0 \sin(\omega t)$$

Dividendo per  $\sqrt{2}$  i valori di picco  $V_0$  e  $i_0$  si ottengono i cosiddetti *valori efficaci* di tensione e corrente:

$$V_{\text{eff}} = V_0/\sqrt{2} \quad e \quad i_{\text{eff}} = i_0/\sqrt{2}$$

Si chiama valore efficace di un segnale periodico il valore che avrebbe un segnale costante di uguale potenza media. La tensione di rete che usiamo in Italia è di 220 V: questo è il valore efficace. Il valore di picco è più alto, cioè  $220 \text{ V} \cdot \sqrt{2}$ . Una differenza di potenziale continua di 220 V fornirebbe ai nostri apparecchi la stessa potenza media effettivamente offerta da quella alternata con valore efficace 220 V.