

Lezione 48: la Meccanica Quantistica (parte seconda)

48.1. Ancora sugli atomi di Democrito

Certo ricorderete come gli atomi di Democrito fossero animati da un moto incessante. Ora abbiamo una chiara spiegazione del perché ciò accada veramente: gli atomi sono oggetti quantistici, sebbene Democrito difficilmente avrebbe potuto comprendere questa affermazione. Come tutti gli oggetti quantistici hanno un'onda associata, la cui lunghezza è data dalla formula di de Broglie:

$$\lambda = h/(m \cdot v).$$

Se facciamo tendere a zero la velocità dell'atomo, allora la lunghezza d'onda tende all'infinito. Pensiamo, per esempio, agli atomi di Xenon che si trovano a temperatura ambiente, dei quali abbiamo trattato negli esercizi della lezione 25. La loro velocità più probabile ha un valore di circa 200 m/s, la massa dell'isotopo più diffuso è 132 u = $132 \cdot 1.7 \cdot 10^{-27}$ kg. Se facciamo il calcolo (fatelo per esercizio!) troviamo una lunghezza d'onda $\lambda = 0.15 \cdot 10^{-10}$ m, ben più piccola della dimensione dell'atomo. Fin qui tutto bene, ma che cosa succede se riduciamo la velocità a valori via via sempre più piccoli? La domanda non è retorica, perché sappiamo bene che per diminuire la velocità degli atomi basta raffreddare il gas. Sappiamo che succedono due cose: il gas finirà per solidificare, la lunghezza d'onda degli atomi diventerà via via sempre più grande. Ma che senso ha un solido per cui la lunghezza d'onda degli atomi è grandissima, per esempio più grande delle dimensioni del cristallo che stiamo considerando?

Possiamo affrontare il problema dal punto di vista opposto: consideriamo per esempio il cristallo di alluminio che abbiamo approssimativamente descritto nella lezione 21. La massa atomica è di 27 u, mentre la distanza tra gli atomi è circa $d = 2.9 \cdot 10^{-10}$ m. La lunghezza d'onda degli atomi deve essere più piccola di questo valore, il che significa che la velocità minima che devono avere gli atomi di alluminio è (fate il calcolo!):

$$v_{\text{MIN}} = h/(m \cdot d) = 50 \text{ m/s}$$

Democrito aveva ragione: tutti gli atomi, anche quelli saldamente impacchettati in un solido, sono davvero animati da un moto incessante.

48.2. Il principio di indeterminazione

Le considerazioni fatte nel paragrafo precedente sono solo un esempio di un principio del tutto generale, noto come principio di indeterminazione. Possiamo formularlo con maggior precisione riconsiderando l'esperimento sull'interferenza di elettroni studiato nella scorsa lezione. Con riferimento alla figura 47.3, indichiamo con x la direzione in cui si propaga l'onda iniziale (quindi da sinistra verso destra) e con y la direzione ad essa ortogonale (quella, cioè, lungo la quale sono allineate le due

fenditure). Per comodità riportiamo qui di seguito la figura (► fig.48.1), con l'indicazione delle grandezze cui facciamo riferimento nel calcolo.

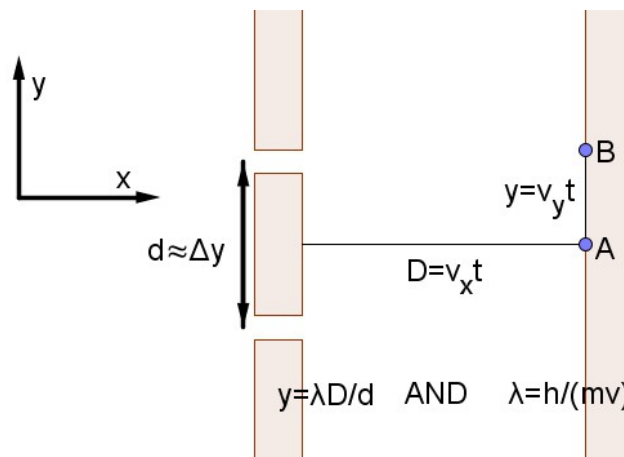


fig.48.1 ancora sull'interferenza da doppia fenditura

Quando le due fenditure sono entrambe aperte, la posizione dell'elettrone in direzione y è nota con un'incertezza Δy il cui ordine di grandezza è pari alla distanza d che separa le due fenditure, $\Delta y \approx d$: più piccola la distanza d , minore l'incertezza Δy .

Sappiamo però che diminuendo la distanza tra le fenditure aumenta la distanza tra i massimi della figura di interferenza. Nella lezione 30 avevamo ricavato una formula che descrive con precisione questo effetto: se D è la distanza dello schermo, allora la distanza y tra il massimo centrale e il primo massimo laterale (cioè il punto A e il punto B della figura 48.1) è $y = D\lambda/d$, dove λ è la lunghezza dell'onda che crea l'interferenza.

Possiamo descrivere la cosa in questi termini: l'elettrone, che in partenza ha solo una componente di velocità v_x , nell'attraversare le fenditure ha un'elevata probabilità di acquistare una componente di velocità in direzione ortogonale, il cui ordine di grandezza è $v_y = y/t$, dove t è il tempo di volo dalle fenditure allo schermo. Essendo $t = D/v_x$, l'incertezza sulla quantità di moto che l'elettrone acquista in direzione y è quindi:

$$\Delta p_y \approx mv_y = my/t = mD\lambda/d/t = mv_x\lambda/d.$$

Siamo pronti per il passo finale: moltiplichiamo a destra e sinistra per d , ricordandoci che $d \approx \Delta y$. Otteniamo:

$$\Delta y \Delta p_y \approx mv_x\lambda = mv_x h/(mv_x) = h$$

Confermiamo cioè quel che avevamo detto all'inizio della scorsa lezione: agli oggetti quantistici non ha senso attribuire, in un istante fissato, una ben precisa posizione e una ben precisa velocità. Le indeterminazioni sulla posizione e sulla quantità di moto in una certa direzione, infatti, non possono essere rese arbitrariamente piccole, in quanto il loro prodotto ha ordine di grandezza pari alla costante di Planck.

Le considerazioni qualitative che abbiamo fatto in questo paragrafo si possono trasformare in un'analisi del tutto convincente dal punto di vista matematico, con la quale si dimostra la *disuguaglianza di Heisenberg* che lega posizione e quantità di moto in una stessa direzione:

$$\Delta y \Delta p_y \geq h/4\pi$$

I fattori a primo termine sono le deviazioni standard delle distribuzioni di probabilità per la posizione e la quantità di moto in un stessa direzione, quella y nell'esempio.

48.3. Una teoria probabilistica

Nella discussione precedente abbiamo visto come le deviazioni standard delle distribuzioni di probabilità per posizione e quantità di moto, in una stessa direzione, siano legate dalla disuguaglianza di Heisenberg.

Tutto l'apparato matematico della meccanica quantistica, in realtà, consiste in algoritmi per calcolare probabilità. Diversi oggetti matematici servono a questo scopo: vettori di stato, funzioni d'onda, operatori autoaggiunti, matrici densità, ... L'obiettivo finale è sempre il medesimo: dato un sistema di oggetti quantistici, vogliamo calcolare le probabilità dei risultati che possiamo ottenere dalle *misure che faremo*, a partire dai risultati delle *misure che abbiamo già fatto*.

Proprio questo è il punto di maggior divaricazione tra la meccanica classica e la meccanica quantistica. Anche le misure che facciamo nell'ambito della meccanica classica, a dire il vero, forniscono distribuzioni di probabilità per i loro risultati possibili, ma queste distribuzioni hanno cause differenti, non dipendono cioè dalla lunghezza dell'onda associata agli oggetti che misuriamo: gli oggetti classici, infatti, hanno lunghezze d'onda troppo piccole per produrre un qualsiasi effetto misurabile. Se misuriamo una lunghezza con un metro a nastro, i possibili risultati si distribuiscono in un intervallo più o meno ampio, a seconda della sensibilità del nastro: non potendo dire nulla di più preciso, assumiamo che la distribuzione sia uniforme in quell'intervallo. Se facciamo misure ad alta sensibilità i risultati si distribuiscono in un intervallo, e la densità di probabilità è più grande verso il centro, e decresce verso gli estremi. In ogni caso nulla ci impedisce di ritenere che la grandezza misurata abbia un suo valore, indipendentemente dal fatto che noi la misuriamo oppure no: l'incertezza nasce dall'interazione tra l'oggetto e l'apparato con cui facciamo la misura.

In meccanica classica una misura, che sia grande o piccola la sua incertezza, rivela una proprietà che l'oggetto possiede indipendentemente dal fatto che noi la misuriamo.

In meccanica quantistica le cose non stanno affatto così. Se misuro con grande precisione la posizione di un elettrone lungo l'asse y , facendolo passare attraverso una coppia di fenditure molto vicine, allora l'elettrone che emerge dall'altra parte non ha una quantità di moto ben definita lungo quella direzione. Anzi: più le fenditure sono vicine, più la quantità di moto si sparpaglia secondo una distribuzione di probabilità molto complicata.

*Ogni misura relativa ad un oggetto quantistico non ne rivela una realtà preesistente.
Ogni misura, al contrario, crea il suo proprio risultato.*

48.4. Perché gli atomi sono stabili?

Negli stessi anni in cui si cercava di interpretare le strane proprietà della luce che si manifestavano nello studio dell'effetto fotoelettrico, un altro problema, anch'esso relativo all'interazione tra luce e atomi, preoccupava la comunità dei fisici: quello della stabilità degli atomi.

Sappiamo che una particella carica che accelera emette un'onda elettromagnetica: l'energia dell'onda emessa va naturalmente a discapito dell'energia con cui si muove la particella emettitrice. Gli elettroni che si muovono dentro a un atomo sono certamente particelle cariche che accelerano: comunque sia fatto il loro moto, di sicuro non può essere rettilineo e uniforme. Gli elettroni, quindi, dovrebbero emettere luce, perdendo quindi energia a causa dell'emissione: se immaginiamo che si muovano di moto circolare intorno al nucleo, allora le orbite dovrebbero diventare via via sempre più piccole, fino a collassare nel nucleo provocando l'implosione dell'atomo.

Ma c'è un aspetto ancor più misterioso: la luce emessa dagli atomi dovrebbe contenere tutte le possibili lunghezze d'onda, presentando quindi uno *spettro di emissione continuo* (► fig.48.2a). Ci si aspettava che ciò dovesse accadere perché si pensava che gli elettroni di ogni atomo potessero perdere energia in quantità qualsiasi, emettendo di conseguenza fotoni di tutte le possibili energie, quindi luce di tutti i possibili colori dello spettro. E invece le cose non stavano affatto così: lo spettro di emissione degli atomi appariva discreto, cioè fatto da righe isolate di diverso colore, ogni atomo essendo contraddistinto da una differente sequenza di righe (► fig.48.2b).

La domanda era perciò la seguente: per quale ragione un atomo che perde energia lo fa emettendo fotoni di alcune frequenze soltanto? La risposta emerse in modo naturale dall'ipotesi di de Broglie: perché gli elettroni dell'atomo sono onde! Nella lezione 31 abbiamo imparato che un'onda confinata su una corda di lunghezza L non può che vibrare secondo uno spettro discreto di frequenze: se poniamo $f_0 = v/2L$ allora le frequenze possibili sono soltanto $f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$

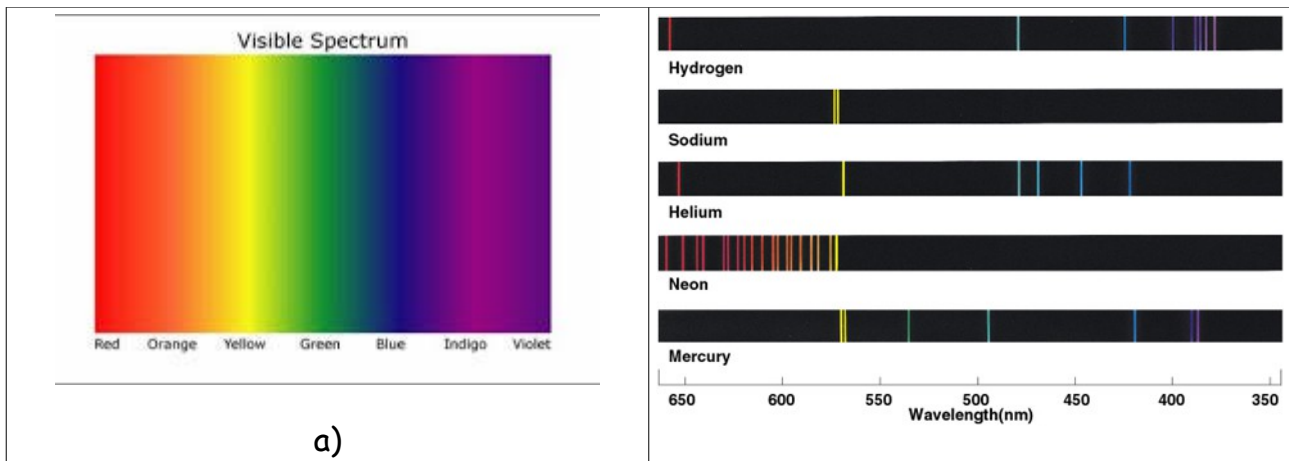


fig.48.2 spettro continuo (a) e spettri discreti di alcuni atomi (b)

48.5. Particelle in scatola

Gli elettroni, in effetti, altro non sono che onde intrappolate dentro una scatola le cui dimensioni sono quelle tipiche di un atomo, quindi circa 10^{-10} m. In questo paragrafo prendiamo in considerazione un semplice modello, in cui la scatola si estende in una direzione soltanto: diciamo che si tratta di una scatola di lunghezza L , proprio come la corda della lezione 31. L'onda associata a un elettrone confinato nella scatola deve annullarsi all'esterno di essa: per descrivere la situazione ci serviamo quindi di un'immagine del tutto analoga alla figura 31.5. Si tratta della prossima figura (► fig.48.3), in cui vediamo rappresentate le prime 4 possibilità che si presentano per l'onda associata all'elettrone: si tratta di onde la cui semi-lunghezza $\lambda/2$ è contenuta un numero intero di volte nella lunghezza L della scatola

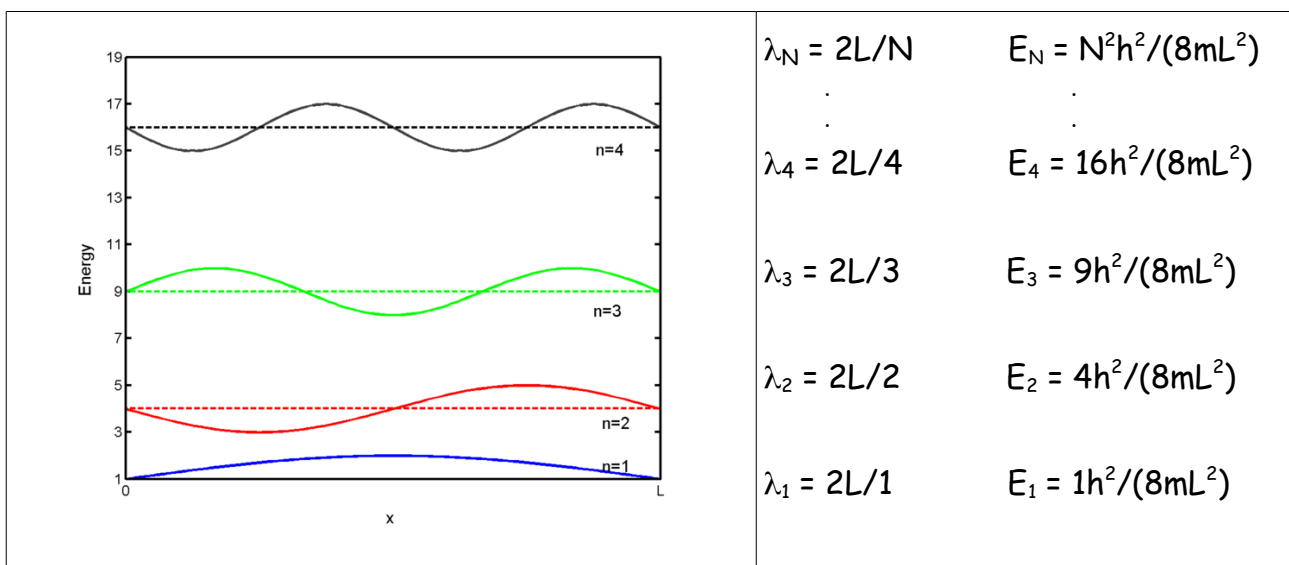


fig.48.3 onde associate a un elettrone confinato in una scatola lunga L

Accanto a ciascuna possibile lunghezza d'onda λ_N è scritta la corrispondente energia E_N , che cresce proporzionalmente al quadrato di N . Il calcolo è facile da fare: basta usare la relazione di de Broglie $\lambda = h/(mv)$, quindi $mv = h/\lambda$. Vediamo che la quantità di moto dell'elettrone è inversamente proporzionale alla lunghezza dell'onda che gli è associata, quindi:

$$p_N = \frac{h}{\lambda} = \frac{hN}{2L}$$

$$E_N = \frac{p_N^2}{2m} = \frac{1}{2m} \cdot \frac{h^2 N^2}{4L^2} = \frac{h^2 N^2}{8mL^2}$$

Il minimo salto energetico che l'elettrone può compiere è quello che corrisponde al passaggio dallo stato di energia E_2 allo stato E_1 . La diminuzione di energia che l'elettrone subisce in questo caso è:

$$E_2 - E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} \cdot (2^2 - 1^2) = \frac{3h^2}{8mL^2}$$

Inserendo i valori delle quantità note ($h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js, $m = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, $L = 10^{-10}$ m) il salto energetico è $\Delta E = 2 \cdot 10^{-17}$ J (fate i calcoli per esercizio!)

Se l'energia persa dall'elettrone è compensata dall'emissione di un fotone, esso deve avere frequenza f proporzionale al salto energetico $\Delta E = hf$, e lunghezza d'onda $\lambda = c/f$, dove c è la velocità della luce. In conclusione troviamo che:

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{3h}{8mL^2} \quad e \quad \lambda = \frac{c}{f} = \frac{8mL^2 c}{3h}$$

Se fate i calcoli (fateli!) trovate una frequenza di circa $3 \cdot 10^{16}$ Hz e una lunghezza d'onda di circa 10^{-8} m, cioè 10 nm.

Il confronto con gli spettri mostrati sopra (► fig.48.2b) è impietoso: lì avevamo lunghezze d'onda situate nella parte visibile dello spettro, qui otteniamo un risultato che si colloca in pieno ultravioletto. D'altra parte che cosa potevamo aspettarci di più da un modello così semplice? Un primo, grande risultato, l'abbiamo ottenuto: lo spettro è fatto, come deve, da una serie discreta di righe.

48.6. Niels Bohr raffina il modello di Rutherford

Il modello che abbiamo costruito nel paragrafo precedente è davvero *molto* rozzo. La realtà è ben diversa: la scatola, in primo luogo, non è affatto unidimensionale perché si estende in tutte e tre le direzioni dello spazio, inoltre la scatola contiene non solo gli elettroni, ma anche il nucleo e il campo elettrico che esso genera.

Di questi aspetti tenne conto Niels Bohr, che nel 1913 ottenne una formula assai più accurata nel descrivere i livelli energetici dell'atomo di idrogeno. La formula, come è facile aspettarsi, contiene la carica elettrica dell'elettrone e la costante elettrica del vuoto:

$$E_N = - \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} \cdot \frac{1}{N^2}$$

Se calcolate la lunghezza d'onda del fotone che viene emesso quando l'elettrone passa dallo stato 3 allo stato 2 troverete proprio i 650 nm circa che corrispondono alla prima riga dello spettro dell'idrogeno mostra nella figura precedente (► fig.48.2b).

48.7. Uno sguardo al formalismo

In queste due lezioni ci siamo sforzati di riuscire in un'impresa quasi disperata: dare un'idea di quello che la meccanica quantistica dice, senza far cenno al modo in cui lo dice. Ora cerchiamo di colmare in minima parte questa lacuna.

Nel formalismo della MQ lo stato di un sistema è descritto da una funzione d'onda complessa: questo oggetto matematico astratto permette di calcolare le probabilità con cui si producono i diversi risultati delle misure che possiamo effettuare su quel sistema. La funzione d'onda, precisamente, rappresenta un'ampiezza di probabilità: l'integrale del suo quadrato, esteso ad una certa porzione di spazio, misura la probabilità che il sistema si trovi proprio in quella porzione. Per esempio: il quadrato della funzione d'onda di un elettrone legato al nucleo di un atomo è la probabilità di trovarlo in una data porzione dello spazio intorno al nucleo, quando decidiamo di misurarne la posizione. La prossima figura (► fig.48.4) descrive alcuni orbitali dell'atomo di idrogeno:

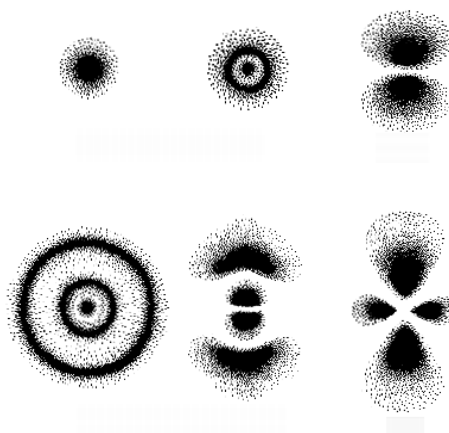


fig.48.4 alcuni orbitali dell'atomo di idrogeno

Si tratta naturalmente di una descrizione bidimensionale di una realtà che vive nello spazio a tre dimensioni, tuttavia il suo significato dovrebbe essere chiaro: la densità

dei punti neri è più grande là dove è più probabile trovare l'elettrone quando ne misuriamo la posizione.

In MQ, a differenza di quanto accade in meccanica classica, esistono coppie di grandezze delle quali non è possibile prevedere i valori simultanei con precisione arbitrariamente grande. Se la funzione d'onda di un elettrone, per esempio, contiene informazioni accurate sulla sua velocità, non può, simultaneamente, contenere informazioni accurate sulla sua posizione. La disuguaglianza di Heisenberg, come sappiamo, quantifica questa caratteristica della funzione d'onda.

Il processo di misura è descritto, nel formalismo della MQ, mediante l'applicazione di un opportuno operatore alla funzione d'onda. Se il sistema si trova in uno stato in cui è noto con certezza il valore di una grandezza, allora la funzione d'onda associata a quello stato è una *autofunzione* dell'operatore associato a questa grandezza, cioè una funzione per la quale l'applicazione dell'operatore produce la funzione stessa, moltiplicata per una qualche costante che rappresenta il valore ottenuto per la grandezza misurata. Si tratta di una frase intricata, quindi conviene considerare un esempio concreto.

Limitandoci per il momento a funzioni di una sola variabile x , conosciamo un famoso esempio di operatore: quello di derivazione D_x . Il suo input è una funzione, il suo output un'altra funzione. Le autofunzioni di D_x hanno una forma che ben conosciamo, essendo tutte funzioni esponenziali in base e :

$$D_x e^{1 \cdot x} = 1 \cdot e^{1 \cdot x} \quad D_x e^{2 \cdot x} = 2 \cdot e^{2 \cdot x} \quad \dots \quad D_x e^{k \cdot x} = k \cdot e^{k \cdot x}$$

Se la variabile x rappresenta la posizione, ci rendiamo conto che una funzione esponenziale non può rappresentare una ampiezza di probabilità: il suo quadrato, infatti, non è integrabile su tutto \mathbb{R} , mentre l'integrale del quadrato di una funzione d'onda deve essere 1, perché 1 è la probabilità di trovare il sistema in un qualsiasi punto dello spazio. Per fortuna, come abbiamo detto, il formalismo della MQ prevede che l'insieme numerico sul quale operare non sia l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali, bensì il più ampio insieme \mathbb{C} dei numeri complessi. Se deriviamo funzioni esponenziali con input immaginario troviamo:

$$D_x e^{i \cdot 1 \cdot x} = i \cdot 1 \cdot e^{i \cdot 1 \cdot x} \quad D_x e^{i \cdot 2 \cdot x} = i \cdot 2 \cdot e^{i \cdot 2 \cdot x} \quad \dots \quad D_x e^{i \cdot k \cdot x} = i \cdot k \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

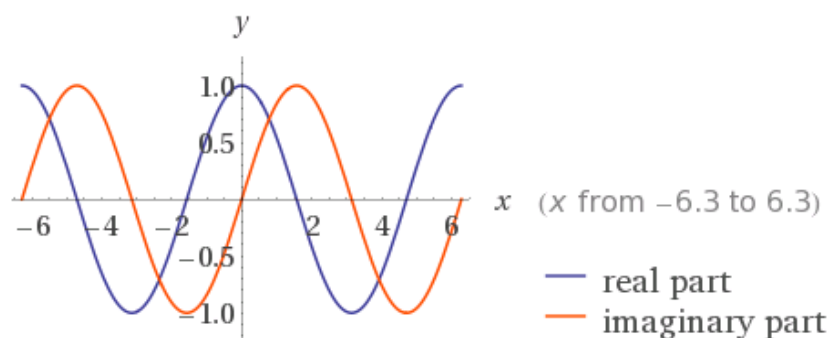
Se applichiamo due volte l'operatore D_x otteniamo la derivata seconda D_x^2 , che ha le stesse autofunzioni, con autovalori che sono i quadrati di quelli precedenti. Poiché il quadrato dell'unità immaginaria è -1 , gli autovalori di D_x^2 sono reali:

$$D_x^2 e^{i \cdot 1 \cdot x} = -1 \cdot e^{i \cdot 1 \cdot x} \quad D_x^2 e^{i \cdot 2 \cdot x} = -4 \cdot e^{i \cdot 2 \cdot x} \quad \dots \quad D_x^2 e^{i \cdot k \cdot x} = -k^2 \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

Un operatore i cui autovalori sono reali si definisce *autoaggiunto*: solo gli operatori autoaggiunti, nel formalismo della MQ, possono rappresentare grandezze fisiche, perché i loro autovalori rappresentano risultati di misure.

48.8. Ancora particelle in scatola

L'esempio che abbiamo scelto nel paragrafo precedente è tutt'altro che casuale: le funzioni d'onda del tipo e^{ikx} sono associate a stati di particelle la cui quantità di moto è proporzionale a k , e l'operatore D_x^2 è associato alla misura dell'energia corrispondente a tali stati. L'energia di una particella libera, infatti, è proporzionale al quadrato della sua quantità di moto. Le funzioni d'onda di questo tipo hanno una parte reale ed una parte immaginaria, che hanno entrambe il giusto andamento per descrivere una particella con quantità di moto definita: la parte reale è un coseno, quella immaginaria un seno (► fig.48.5).

fig.48.5 parte reale e parte immaginaria della funzione $\exp(ix)$

Questa caratteristica delle funzioni e^{ikx} , autofunzioni della quantità di moto e dell'energia, ci conferma quel che già sappiamo: se una particella ha quantità di moto perfettamente definita, allora la sua posizione è del tutto indefinita. La funzione d'onda, infatti, oscilla su tutto \mathbb{R} con la stessa ampiezza, il che significa che è ugualmente probabile trovarla in qualunque zona dello spazio.

L'aspetto forse più sorprendente del formalismo quantistico è costituito dal *principio di sovrapposizione*: se un oggetto quantistico può trovarsi in due stati che indichiamo convenzionalmente con $|1\rangle$ e $|2\rangle$, allora può trovarsi in qualunque altro stato $a|1\rangle + \beta|2\rangle$, dove a e β sono numeri complessi tali che $a^2 + \beta^2 = 1$. Supponiamo che gli stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$ siano autostati dell'operatore P con autovalori a e b rispettivamente: ciò significa, come sappiamo, che

$$P|1\rangle = a|1\rangle \quad \text{e} \quad P|2\rangle = b|2\rangle$$

Se misuriamo la grandezza P quando il sistema si trova nello stato $a|1\rangle + \beta|2\rangle$, il risultato che otteniamo non è una combinazione dei valori a e b : i possibili risultati sono a , con probabilità a^2 , oppure b , con probabilità β^2 .

Quindi se sommiamo autofunzioni della quantità di moto, ciascuna moltiplicata per un opportuno coefficiente, otteniamo ancora possibili funzioni d'onda, per le quali la quantità di moto non è più ben definita, ma ha una distribuzione di probabilità che

dipende dai coefficienti che usiamo nel fare la somma. Se per esempio costruiamo la funzione f definita come segue:

$$f(x) = \alpha \cdot \exp(ik_1x) + \beta \cdot \exp(ik_2x) + \gamma \cdot \exp(ik_3x) + \delta \cdot \exp(ik_4x) + \dots$$

allora f è ancora una possibile funzione d'onda, a condizione che $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \dots = 1$. Se misuriamo la quantità di moto quando la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda f , allora troviamo i valori k_1 con probabilità α^2 , k_2 con probabilità β^2 , k_3 con probabilità γ^2 , ...

*Avremo cioè ottenuto uno stato in cui
la quantità di moto della particella si fa tanto più incerta
quanto maggiore è il numero dei termini che sommiamo.*

Se i coefficienti hanno il giusto valore possiamo ottenere un risultato spettacolare: la funzione d'onda tende a diventare costante in un intervallo di opportuna lunghezza L , annullandosi bruscamente appena al di fuori di tale intervallo. Possiamo cioè rinchiudere la particella in una scatola di lunghezza L , definendone quindi la posizione con precisione tanto maggiore quanto più piccolo è L , a patto naturalmente di rendere la quantità di moto sempre meno definita, quanto più si fa definita la posizione.