La probabilità a scuola: il suo senso, la sua valenza educativa, gli strumenti per insegnarla.

Francesca Amodio
Carlo Dapueto

Come introdurre il concetto

Il primo nodo concettuale da affrontare, nell'insegnamento della probabilità, riguarda la ***definizione*** stessa di probabilità: nei libri di testo se ne trovano diverse tipologie, per cui l'insegnante deve per prima cosa chiedersi quale definizione è bene adottare, analizzando di ognuna potenzialità e criticità.
Due definizioni che, a nostro avviso, sono da evitare, sono la cosiddetta "definizione classica" e quella che potremmo invece chiamare "definizione semi-assiomatica".
La prima, presente della maggior parte dei libri di testo, definisce la probabilità come "*rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, quando sono tutti ugualmente possibili"*.
Il problema, in questo caso, sta nella dicitura "ugualmente possibili", che implica una circolarità nella definizione in quanto si riferisce al concetto stesso di probabilità.
Inoltre, la definizione si riferisce solo al caso di eventi equiprobabili.
Si potrebbe obiettare che nei casi «semplici», o per lo meno quelli che gli studenti incontrano più frequentemente nella quotidianità, gli eventi hanno questa proprietà. Ma ciò non è vero: non servono esempi complessi per mostrare che l'equiprobabilità non è una proprietà così frequente nel mondo reale.
Prendiamo ad esempio il caso del lancio di un dado, che spesso è assunto come esempio di equiprobabilità. Pensiamo ad un dado costruito con la carta a partire dal suo sviluppo piano dotato di "linguette", presente in un giornalino per bambini: si tratta di un semplice esempio di dado truccato, perchè la faccia su cui vengono

incollate più linguette pesa di più e, quindi, ha più probabilità di non uscire.
Per altro, esempi come questo permettono ai bambini di iniziare a riflettere sulle differenze tra la realtà e i modelli matematici che si utilizzano per analizzarla.
La definizione classica, infine, si riferisce solo al caso finito, e si possono fare molti esempi elementari che non rientrano in questo ambito; ne vedremo uno fra poco.
In molti libri di testo, la probabilità è presentata invece con un'impostazione che potremmo definire "semi-assiomatica": dopo aver detto che cosa si intende per evento e per incompatibilità tra eventi, la probabilità viene definita come come una funzione P definita sugli eventi, tale che:

- *$0 \leq P(A) \leq 1$ per ogni evento A,*
- *$P(A$ **or** $\overline{A}) = 1$ se A è un evento e $\overline{A}$ è il suo evento contrario*
- *$P(A_1$ **or** $A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ se A_1 e A_2 sono eventi incompatibili*

Analizzando tale definizione, si nota che essa non è esaustiva, in quanto l'ultimo assioma permette di calcolare la probabilità solo di unioni finite di eventi. Vediamo un esempio semplice, riferito anche alla definizione precedente:
«Quante volte devo lanciare una moneta equa per ottenere testa?»
La probabilità di ottenere testa al primo lancio è 1/2; quella di ottenerla al secondo è 1/4; quella di ottenerla al terzo è 1/8; … Ho infiniti casi possibili, la somma delle cui probabilità 1/2+1/4+1/8+... è il 100%, cioè 1. Questa somma infinita è un esempio di infinito potenziale, a cui i bambini dovrebbero essere stati abituati, operativamente, sin dalla scuola elementare (100 diviso 3 fa 33.333... ossia 33 e 3/10 e 3/100 e 3/1000 …).
Ecco, quindi , come dovrebbe essere modificato il terzo assioma:

- *se , $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sono eventi a due a due incompatibili $P(A_1$ **or** A_2 **or** A_3 **or** $\ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$*

In effetti non c'è altro modo di introdurre il concetto di probabilità se non quello assiomatico. La cosa può spaventare l'insegnante, ma, se ci si pensa, gran parte dei concetti matematici sono introdotti

assiomaticamente: fin dai primi anni di scuola i bambini imparano ad usare i numeri e ad operare con essi senza che mai venga loro detto: *« un numero è... »*. O quando operano sul "piano", di fatto usano implicitamente un piano astratto in cui vale la distanza euclidea. Ciò accade tutte le volte che si "definisce" un oggetto matematico descrivendone le regole di utilizzo, cioè in modo assiomatico. Del concetto di probabilità, in particolare, devono essere precisate le regole a cui deve sottostare, esplicitando (anche senza parlare di "assiomi") che la scelta dei valori di probabilità da assegnare non dipende, in prima battuta, da considerazioni matematiche, ma da esperimenti, idee, supposizioni, … nelle quali la matematica non ha un ruolo di guida. Si pensi ai seguenti esempi:

1. *Il Paperopoli sta per giocare una partita. Secondo Qui vince al 30%, mentre secondo Qua vince al 45%.*
2. *Lancio il dado non equo costruito con la carta considerato inizialmente. Qual è la probabilità che esca il numero 6?*

Nel primo caso la probabilità di vittoria attribuita alla squadra può dipendere da diversi fattori: attitudine al rischio di chi scommette, statistiche, opinioni sui giocatori, … mentre nel secondo caso la valutazione può dipendere dall'osservazione di un certo numero di prove o da stime fisiche sulla struttura del dado. In entrambi i casi, tuttavia, le regole del ***calcolo*** della probabilità sono le stesse.

Nell'introdurre la probabilità a scuola, oltre al problema di come "definirla", ci si può porre quello del ruolo che debba avere la ***storia*** della matematica. Secondo noi essa può intervenire solo come elemento di riflessione successiva. Nel momento della nascita della probabilità, infatti, c'erano ben altre conoscenze matematiche, ambiti applicativi e strumenti di calcolo rispetto a quelli a cui può riferirsi un ragazzo dei nostri giorni. Questo, del resto, vale per tutte le aree della matematica. È invece conveniente utilizzare la storia in seguito, per riflettere con gli studenti su alcuni loro errori, riferendosi ad errori analoghi commessi anche da personaggi famosi (Cardano, d'Alambert,...).

Non si può poi ignorare il fatto che oggi la probabilità risulta

fortemente connessa, come approfondiremo a breve, con la ***statistica***, anche in relazione all'uso del ***computer***. Esso consente di non perdere tempo in calcoli complessi solo tecnicamente e utilizza linguaggi formali che consentono ai ragazzi sia di riflettere su sintassi e semantica che di acquisire, naturalmente, abilità linguistiche importanti per l'uso consapevole della matematica. Inoltre, come vedremo, è decisivo mettere a fuoco come l'impiego del computer consenta di affrontare casi in cui la probabilità può essere determinata solo sperimentalmente, attraverso simulazioni, offrendo l'occasione di riflettere, anche in questo ambito della matematica, dei rapporti tra "modelli" e "realtà".

Collegamenti con la statistica

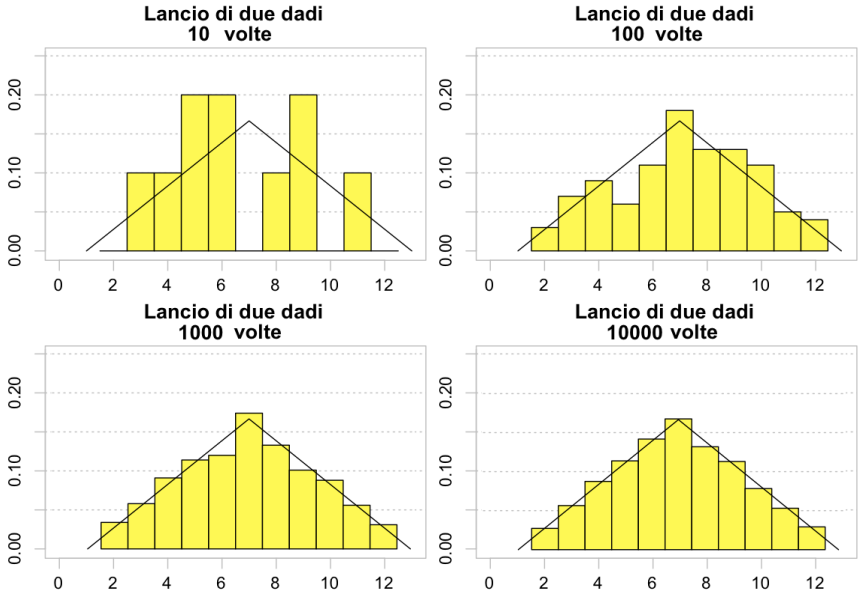
Sono molte le connessioni tra probabilità e statistica: esse hanno in comune, ad un primo livello, linguaggio, strumenti algebrici, rappresentazioni grafiche e situazioni di riferimento. Le valutazioni statistiche sono spesso legate a quelle probabilistiche, ad esempio per "prevedere il futuro" in termini di probabilità del verificarsi di eventi: se si sapesse che Giorgio, al tiro al bersaglio, ha, statisticamente, una percentuale di successo del 20%, ci si può chiedere, di fronte alla effettuazione di cinque tiri da parte di Giorgio, se sia da ritenersi più probabile che non colpisca mai il bersaglio, che lo colpisca una sola volta o che lo colpisca più di una volta[1].

Per sviluppare analisi statistiche in classe, per prima cosa occorrono i dati da analizzare. Inizialmente, essi possono essere reperiti direttamente dagli studenti della classe, ma si possono trovare anche già raccolti da enti o aziende locali o da enti statistici, come l'ISTAT.

Quando si ha a che fare con dati raccolti, il primo problema da affrontare in classe riguarda il ***campionamento***, tema che va affrontato subito perchè alcuni problemi nascono già in esempi

1 Per questo esempio e i successivi, vedi **Materiali vari** nei riferimenti in fondo all'articolo.

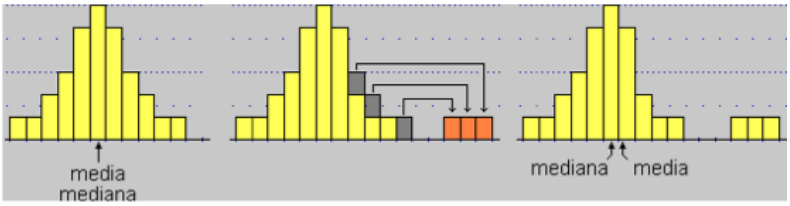
molto semplici. Ad esempio, volendo conoscere il rapporto tra la quantità dei maschi e quella delle femmine, se si prendono come campione gli studenti della propria classe o della propria scuola, il risultato risente sia della numerosità degli alunni che della tipologia della scuola. Si tratta di un esempio semplice con cui gli studenti possono iniziare ad osservare come, all'aumentare dei dati e all'allargamento dell'ambito in cui essi sono raccolti, i risultati tendano a stabilizzarsi. Non si possono dare formulazioni rigorose, ma si avviano riflessioni su cui, poi, potranno innescarsi ulteriori approfondimenti.
Vediamo un esempio semplice di simulazione condotta al computer, utilizzando il programma **R**: in pochi secondi vengono generati gli istogrammi che descrivono gli esiti della simulazione del lancio di due dadi.



Il problema del campionamento è ricorrente, e poi, alla fine delle superiori, si collega al problema della precisione con cui valutare, ad esempio, le rette di regressione (occorre rendersi conto che per due punti passa un'unica retta ma che essa non ha alcuna

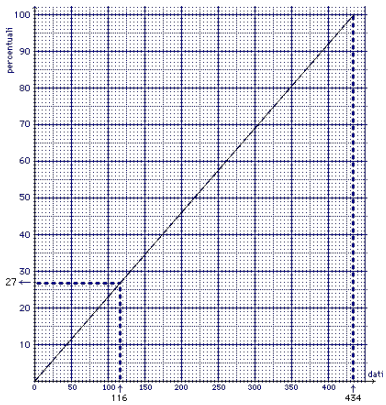
affidabilità come indicatore del collegamento esistente tra le due variabili; all'aumentare del numero dei dati, invece, ...).
Certamente si può parlare di probabilità anche ***senza fare riferimento alla statistica***. Il linguaggio probabilistico entra in gioco anche nel linguaggio dei bambini; esempi possono essere le espressioni «*Secondo me il Paperopoli vince al 30%*» oppure «*Penso che sia più probabile che io venga al tuo compleanno da solo piuttosto che con Ginetto*». È importante notare che il bambino capisce ed utilizza questo linguaggio anche se non si tratta di una probabilità precisata "matematicamente": il bisogno di formalizzare, anche quando non è necessario, è spesso solo un problema dell'insegnante. Osserviamo, infine, che comunque, nella formulazione della prima frase, entra in gioco, naturalmente, utilizzando le percentuali, il riferimento indiretto alla statistica.
Alcuni strumenti utili per analisi statistiche e probabilistiche sono:

- **media** e **mediana:** sono entrambi indici di posizione, in quanto indicano, con diverse caratterizzazioni, la zona dell'asse numerico in cui i dati cadono con maggiore frequenza, ma hanno alcune importanti differenze che raramente vengono messe in luce con gli studenti:
    - interpretazione fisica: la mediana rappresenta l'ascissa in cui praticare un taglio verticale che divida l'istogramma in due parti di area uguale, mentre la media è l'ascissa del baricentro dell'istogramma, ossia del punto dell'asse orizzontale per cui appenderlo in modo che rimanga con la base orizzontale;
    - sensibilità alle code: come evidenziato dall'immagine seguente, la media è sensibile alla presenza di code, la mediana no (ciò si comprende meglio anche grazie all'interpretazione fisica);
    - la media è difficile da calcolare nel caso di moltissimi dati, mentre la mediana è sempre determinabile, anche in bassi livelli scolastici.



- **percentili**: si tratta di uno strumento di base, semplice da usare, impiegabile a diversi livelli, che non fa altro che generalizzare il concetto di mediana (ad esempio, il 25° percentile è il valore che separa il primo 25% dei dati dai rimanenti) e che consente di quantificare la dispersione dei dati (la distanza tra il 25° e il 75° percentile dà, per esempio, l'ampiezza dell'intervallo in cui cade il 50% centrale dei dati).

Strumenti di calcolo e di rappresentazione



Gli strumenti di rappresentazione possono essere introdotti a partire dai ***primissimi livelli scolastici***, affinandone via via l'uso. Si può iniziare con l'uso di istogrammi a crocette tracciati su carta quadrettata, strumento che non necessita nemmeno della conoscenza dei numeri; si possono successivamente raccogliere i dati in tabelle di dimensioni e caratteristiche diverse, per esplorare e sottolineare differenti aspetti dell'indagine; infine si può passare dall'analisi dei dati raccolti alle percentuali.

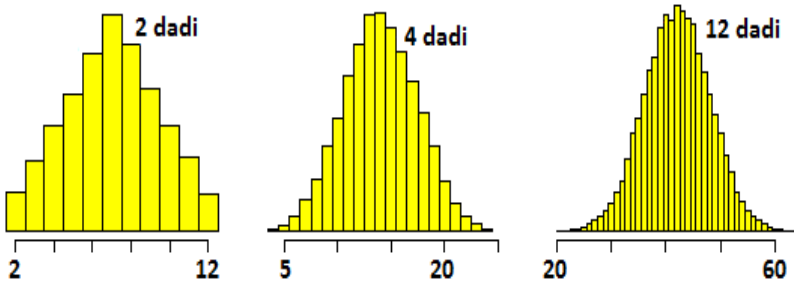
Per questo passaggio, un suggerimento utile è quello di utilizzare una retta come quella della figura precedente, che permette facilmente di trasformare proporzionalmente i dati ed arrotondarli.

Strumenti come questo, costruibili semplicemente in classe, sono utilizzabili anche per fare ripartizioni, cambi di scala, ...
Nelle classi successive gli stessi concetti potranno essere affrontati con strumenti di diversa complessità.
Uno strumento più sofisticato è il concetto di ***limite***. Ha senso, a livello adulto ma anche nel triennio delle superiori di alcuni tipi di scuole, confrontare il concetto di limite in probabilità con la definizione data in analisi:

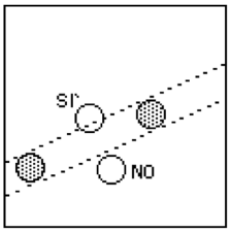
- **limite**: *S_n converge a L se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che, per ogni $n > N$, S_n dista da L meno di ε.*
- **limite in probabilità**: *f_n converge in probabilità a f se, fissata comunque una probabilità **p**, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che, con probabilità **p**, per ogni $n > N$, f_n dista da f meno di ε.*

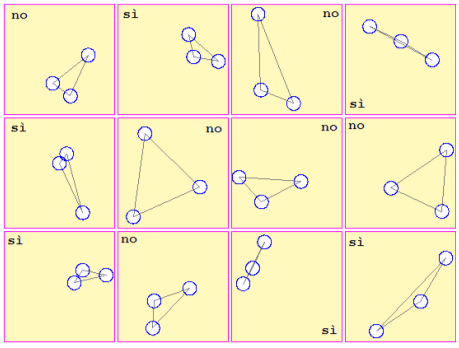
Si può notare che il concetto di limite in probabilità coincide con quello usuale, a parte il fatto che si trova un valore di *n* a partire dal quale vale la diseguaglianza non con certezza, ma con una certa probabilità fissata in precedenza. Ciò corrisponde al fatto che, ad esempio, se si lancia una coppia di dadi, prima o poi la media delle uscite si stabilizza attorno a 7, ma, anche se è altamente improbabile, potrebbe accadere che a un certo punto si susseguano 20 uscite uguali a 2 che abbassino, provvisoriamente, la media.
In altre scuole ci si può fermare all'idea che aumentando le prove la frequenza tende a stabilizzarsi. Anche del ***teorema limite centrale*** (che, ovviamente, non può essere dimostrato, neanche nei primi anni di università) se ne può dare una formulazione rigorosa o lo si può descrivere intuitivamente (fermandosi alla versione debole, riferita a variabili casuali con la stessa legge di distribuzione): *se U_1, U_2, U_3, ... sono egualmente distribuite, la media di N di esse, al crescere di N, tende ad avere legge di distribuzione gaussiana*. Esso costituisce, nel triennio, la cerniera tra probabilità e statistica. Per altro è facile congetturalo c*on il computer* (e precisare che la sua varianza tende ad essere la divisione per N delle varianze delle U_i).
Parlando di limite è obbligatorio parlare di ***infinito***. Anche in

probabilità si incontrano sia l'infinito potenziale, discreto e numerabile, quello, per intenderci, del lancio ripetuto di una moneta, sia l'infinito continuo, legato sia a fenomeni che, teoricamente, possono avere realizzazioni più che numerabili (ne vedremo un esempio tra poco), sia al passaggio dagli istogrammi alle curve continue, dalle sommatorie agli integrali. Questo aspetto mette in luce come il calcolo delle probabilità utilizzi strumenti matematici che sono comunque impiegati nell'ambito dell'insegnamento della matematica: la probabilità non deve essere una cosa "in più" da insegnare (o da imparare), ma deve intrecciarsi con l'insegnamento (l'apprendimento) del resto.
E fra il resto c'è anche la ***fisica***, e in particolare il tema delle ***misure***: quelle ad alta sensibilità, a cui si collega direttamente anche il teorema limite centrale, e quelle a bassa sensibilità (individuate direttamente con gli strumenti graduati), a cui si collegano altri aspetti, connessi allo studio degli intervalli di indeterminazione. Su questo non ci soffermiamo.
Infine, vediamo alcuni usi del ***calcolo combinatorio***, strumento che spesso è presentato in apertura del capitolo di probabilità dei libri di testo. Noi riteniamo, invece, che sia bene introdurlo come strumento di calcolo a sé, in situazioni diverse dalla probabilità e dalla statistica, e solo successivamente vederne gli utilizzi in ambito probabilistico, sia per esercizi che ne riguardano la definizione classica, sia per usi più complessi, ad esempio per motivare l'introduzione del teorema limite centrale. L'illustrazione seguente, ad esempio, mostra come, all'aumentare del numero dei dadi lanciati, la distribuzione della somma delle uscite tende ad una gaussiana.



Occorre, però, non presentare il calcolo combinatorio come strumento che permette di risolvere ogni situazione di tipo combinatorio. Si prenda in considerazione il seguente esempio:
Si lanciano tre monete uguali su un foglio in cui è tracciato un quadrato di lato pari a 8 volte il diametro delle monete. Si considerano soltanto i lanci in cui tutte e tre le monete si fermano completamente dentro al quadrato. Qual è la probabilità di ottenere con un lancio tre monete allineate (cioè una delle tre monete cada sulla striscia determinata dalle altre due)?
In questo caso, volendo usare il calcolo combinatorio, lo studio sarebbe oltremodo complesso; invece con una simulazione (di cui sotto a destra sono riprodotti alcuni esiti grafici) ottengo un'ottima approssimazione del risultato: (42.05 ± 0.05)% (come già osservato, non è un risultato certo: ha probabilità del 99.7%).





Simulazioni e sperimentazioni dal vivo

Si è già accennato al ruolo didattico positivo che possono svolgere sperimentazioni e simulazioni. Approfondiamo brevemente questo aspetto.
Intanto quali sono i vantaggi del condurre un ***esperimento dal vivo*** in classe?
Innanzitutto la pratica di progettare e condurre semplici esperimenti risponde al bisogno di concretezza spesso avvertito dagli studenti. Inoltre permette di congetturare ipotesi, mettendo anche in luce eventuali errori commessi dagli alunni e dando ad essi la possibilità di comprenderli e superarli. Consente, poi, in un contesto pratico, di applicare, e consolidare, gli strumenti statistici e probabilistici.
Quando, per motivi diversi e già accennati, non si può tradurre il problema in esperimento, si può ricorrere alla sua ***simulazione*** mediante computer.
La simulazione è uno strumento importante per la didattica della probabilità (e non solo) perchè, oltre a consentire di affrontare problemi altrimenti non risolubili, permette di riflettere sull'importanza della formalizzazione: per simulare, infatti, ho bisogno di mettere a punto un modello matematico, che traduca quanto più fedelmente possibile la realtà che voglio analizzare.
Abbiamo già visto alcuni problemi che possono essere analizzati mediante simulazioni; consideriamone un altro:

- *Sappiamo che il 12% della popolazione mondiale è mancina. Qual è la probabilità che in un campione casuale di 100 persone il numero di mancini sia compreso tra 10 e 14 (estremi inclusi)?*

La simulazione stocastica ha inoltre molte applicazioni pratiche anche a livello di ricerca, e può quindi essere un argomento utile a stimolare l'interesse degli studenti verso lo studio della probabilità e della statistica. Ad esempio la si utilizza per risolvere problemi di traffico e trasporto, nelle previsioni meteorologiche, nella genetica, nello studio dell'evoluzione di popolazioni, per analizzare domanda e offerta nella produzione industriale, ...

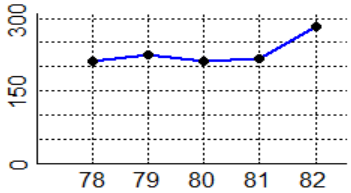
Rapporti con altre discipline e con la realtà

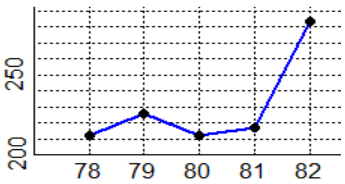
La probabilità e la statistica andrebbero introdotte in un contesto ***interdisciplinare*** in quanto, di per sé, hanno senso, ad un primo livello, solo per modellizzare ***situazioni reali***. Man mano che le diverse materie iniziano a distinguersi le une dalle altre, la probabilità e la statistica forniscono strumenti indispensabili per analizzare fenomeni studiati dalle altre discipline. Basti pensare, al livello della scuola di base, alla geografia e alla storia, oltre che alle scienze.
Nella scuola superiore diviene naturale l'intreccio con la ***fisica***, a cui abbiamo già accennato. I rapporti che si sviluppano con questa disciplina sono del tutto particolari, innanzitutto in quanto in essa, a differenza degli altri ambiti disciplinari, valgono leggi deterministiche: ad esempio trovare, con strumenti probabilistici, la curva che meglio approssima certi dati ha un significato molto diverso da una attività analoga riferita a dati di tipo sociale.
Ma vi sono interazioni possibili con ***tutte le discipline***: non solo biologia, chimica, storia e geografia. Ad esempio, in un liceo classico, si potrà vedere come l'autore di un certo brano può essere individuato analizzando statisticamente la struttura di esso o, in un liceo linguistico, si può fare uno studio statistico per comparare lingue diverse.
Tuttavia ciò difficilmente si realizza. Da una parte vengono spesso sollevate, pretestuosamente, problemi legate alla difficoltà di usare il computer per analizzare i dati. Dall'altra, vi è il fatto che raramente esiste un coordinamento con i colleghi delle altre discipline, con i quali sarebbe necessario sapersi "passare la palla"; ad esempio, in matematica si potrebbero introdurre concetti e strumenti per analizzare i dati di natura storica, mentre in storia si potrebbe guidare e commentare l'analisi dei dati stessi.
Restando ***in ambito matematico***, la probabilità si presta al collegamento con altre aree ed argomenti: percentuali e arrotondamenti, calcolo algebrico (uso delle formule e delle variabili; riflessione sulla differenza tra variabili casuali e variabili

deterministiche), integrazione (in questo caso la probabilità può rappresentare un originale ambiente per la sua introduzione), geometria (si pensi ad esempio ai metodi di rappresentazione grafica dei dati e alla scelta delle opportune unità di misura). Da non dimenticare, infine, tutte le riflessioni generali sulla modellizzazione matematica.

È proprio il rapporto diretto, ma complesso, che la probabilità e la statistica hanno con la realtà che le rendono soggette a ***misconcezioni***, sulle quali la scuola deve intervenire, per dare un senso al suo ruolo, e perché i media spesso sono complici di queste cattive interpretazioni. Alcuni esempi:

- nel lotto si è portati spesso a scommettere sull'uscita dei "numeri ritardatari", mentre la probabilità insegna che le estrazioni del lotto sono prive di memoria;
- un sondaggio, quando il campione è piccolo e non è scelto bene, quando ci sono persone che non rispondono ad esso, … non ha alcuna attendibilità;
- ogni vaccinazione comporta il rischio di trasmettere la malattia, ma occorre valutare la relazione tra esso e la percentuale di diffusione della malattia;
- nelle rappresentazioni grafiche la scelta della scala può orientare a diverse interpretazioni (come si vede nel seguente esempio, riferito al fenomeno della disoccupazione).





Nell'insegnamento, poi, occorre tener conto della ***valenza psicologica*** che possono avere statistica e probabilità nello spersonalizzare i problemi e, quindi, nel facilitare gli alunni che li hanno ad affrontarli. Si potrebbero fare molti esempi al riguardo, sia semplici che più complessi (in cui intervengono la probabilità

condizionata, la correlazione, …).

Concetti matematici da affrontare

Abbiamo detto che, nella scuola di base e nei primi anni di scuola superiore, la probabilità (e la statistica) non coinvolgono concetti matematici sostanzialmente diversi da quelli utilizzati nelle altre aree matematiche: cambiano il contesto d'uso e l'interpretazione delle elaborazioni, simboliche e numeriche. A metà della scuola superiore occorre invece approfondire i concetti in modo più ***astratto***, non per un rigore fine a sé stesso, ma perché il rapporto tra "realtà" e "modelli matematici" si sposta in avanti: la rappresentazione matematica, prima astrazione di situazioni elementari, diventa poi la base "concreta" per successive astrazioni. Questa dinamicità del rapporto tra "realtà" e "modelli disciplinari" vale per tutte le materie, ma in particolare per la matematica, che ha una struttura ed una articolazione interna particolari.
Cambia anche il rapporto tra ***conoscenza ed uso*** (consapevole) dei concetti matematici. Il matematico di professione usa la maggior parte dei concetti senza conoscere dettagliatamente la definizione rigorosa di essi e conoscendo solo l'enunciato e le applicazioni dei teoremi che impiega. Ben pochi probabilisti sanno, ad esempio, come impostare la dimostrazione di un risultato fondamentale come il teorema limite centrale. Analogamente, nella scuola occorre educare a gestire questo rapporto tra uso e conoscenza, occorre dare un'idea degli sviluppi e delle applicazioni e nello stesso tempo creare dei "vaccini" contro un loro uso disinvolto ed educare a far riferimento, poi, nella vita, a chi ha le competenze che ci possono aiutare ad affrontare i problemi.
Fondamentale, in quest'ottica, è il ricorso a software affidabile, gratuito (in modo che gli alunni possano usarlo al di fuori della scuola), che consenta di affrontare situazioni complesse a ***scatola nera***, con diversi livelli di approfondimento. Compito dell'insegnante sarà quello di educare all'uso "critico" di esso. Di questo ci occuperemo nel prossimo paragrafo.

Software: alcuni suggerimenti

Raccogliamo quindi le idee per quanto riguarda gli strumenti "tecnologici" che ci vengono in aiuto nell'insegnare la probabilità e la statistica. Il ruolo didattico fondamentale di questi supporti è ormai indicato nei programmi dei vari ordini scolastici da parecchi decenni, ma nella scuola essi non hanno ancora avuto una diffusione effettiva (ora se ne sta estendendo l'uso, ma quasi solo dal punto di vista mediatico).

Secondo noi il software adeguato dovrebbe essere:

- gratuito;
- multifunzione (a scuola, invece, si usano spesso molti software per i diversi usi);
- dotato di un'interfaccia semplice da usare;
- utilizzabile a diversi livelli scolastici, a diversi livelli di approfondimento.

Qualche possibile "software" (inteso, in senso lato, come strumento ausiliario) quindi può essere:

- la carta quadrettata (sin dalla scuola dell'infanzia);
- la calcolatrice tascabile (al cui utilizzo consapevole, a partire dalla scuola elementare, si dovrebbero dedicare tempo e risorse didattiche);
- il foglio di calcolo (comodo per la sua semplicità di utilizzo in contesti semplici, ma con molte controindicazioni per affrontare i calcoli statistici: può essere utilizzato agevolmente solo per pochi dati, ha una sintassi che dipende dalla lingua, non consente di rappresentare istogrammi di basi diverse, ...);
- WolframAlpha (è usabile da rete, da qualsiasi computer, consente di affrontare facilmente molte attività matematiche; per quanto riguarda la statistica ha il limite di essere in grado di elaborare solo pochi dati);
- Wikipedia (può essere usato solo come banca di esempi e

definizioni, preferendo la versione inglese a quella italiana, ben poco attendibile);

- **R** (è il software usato da chi si occupa professionalmente di statistica e probabilità).

Quest'ultimo software, ***R***, è secondo noi il migliore da impiegare, a partire dagli anni finali della scuola secondaria di primo grado, in quanto:

- consente di acquisire dati direttamente da documenti testuali;
- possiede numerosi comandi per l'elaborazione immediata dei dati: *summary* (che fornisce media, estremi, quartili), *boxplot*, *pie*, *hist*, *stem*;
- permette di progettare e condurre simulazioni;
- opera anche in statistica bivariata e multivariata.

Inoltre, è un software multifunzione, che permette anche, ad esempio, di tracciare grafici di funzioni di una o due variabili, operare calcoli esatti e approssimati, costruire animazioni, scrivere formule in LaTeX, disegnare figure in due o tre dimensioni, operare con matrici e vettori, elaborare tabelle, risolvere numericamente le equazioni, calcolare derivate e integrali, definire ed operare su successioni ricorsive, operare con numeri complessi e molto altro ancora.

Conclusioni

Abbiamo fatto una rapida rassegna dei problemi didattici relativi all'insegnamento della probabilità. Inevitabilmente ci siamo occupati anche, se pur marginalmente, di statistica. Speriamo di aver offerto spunti di riflessione che possano tornare utili per ripensare e rivedere il proprio insegnamento, sia nella scuola di base che in quella superiore. Nelle indicazioni bibliografiche seguenti, indichiamo anche come reperire alcuni materiali didattici a cui abbiamo fatto riferimento. Non abbiamo messo riferimenti tecnici, se non quelli ad un “classico” del calcolo delle probabilità,

in cui gli appassionati possono trovare la dimostrazione del "teorema limite centrale".

Riferimenti

- F. Amodio, C. Dapueto, F. Vannucci, ***L'uso del software R, gratuito e polivalente*** (L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 37 B, n.3)
- B. V. Gnedenko, ***Teoria della probabilità***, Editori Riuniti, 1979
- **The *R* Project for Statistical Computing**: http://www.r-project.org
- Esempi statistici e probabilistici in **WolframAlpha**: http://www.wolframalpha.com/examples/Statistics.html
- **Istat-Dima**, Il ragionamento statistico per saper discernere: http://macosa.dima.unige.it/R/corsodoria.htm
- **Materiali vari**: http://macosa.dima.unige.it/morin