

Smarrirsi nel caleidoscopio:simmetria e infinito

Robert Ghattas

*[Dio] ha fatto bella ogni cosa a suo tempo,
ma egli ha messo la nozione dell'eternità nel loro cuore,
senza però che gli uomini possano capire
l'opera compiuta da Dio dal principio alla fine.
Ho concluso che non c'è nulla di meglio per essi
che godere e agire bene nella loro vita.
qo 3,11-12*

Moltiplicare all'infinito

Il modo più banale per generare simmetria è quello di utilizzare uno specchio. Gli specchi godono di un'algebra tutta particolare, per cui

$$1 \text{ mela} + 1 \text{ specchio} = 2 \text{ mele}$$

ma...

$$1 \text{ mela} + 2 \text{ specchi} = \text{infinita mele}$$

Il caleidoscopio sfrutta esattamente questo procedimento per farci smarrire al suo interno. La sensazione di "sapere come va avanti la storia" genera la percezione di infinito, anche se in realtà vediamo il frammento di vetro colorato (o la mela) replicato al massimo 10 volte.

Ecco quindi il primo, semplice, modo di generare l'infinito mediante simmetria: prendere un modulo e ripeterlo un numero indefinito di volte. Questa operazione può essere ritrovata nelle arti figurative quanto nella letteratura.

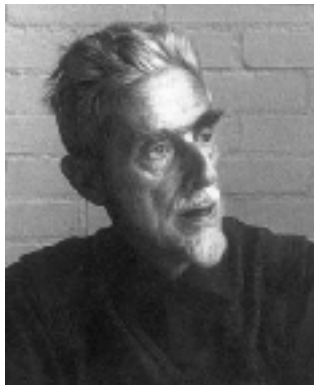
Per avere un'idea di che cosa significhi questa ripetitività nella grafica, è sufficiente dare un'occhiata agli affreschi e ai mosaici dell'Alhambra di Granada: pavimenti e pareti sono tassellati con moduli geometrici ripetuti su tutta la superficie.

Non siamo ancora di fronte ad un infinito (la parete prima o poi termina!), ma è chiaro che i limiti sono soltanto limiti fisici.

Il problema di ricoprire una superficie, ovvero il piano, con uno o più moduli ripetuti in maniera periodica costituisce un'affascinante campo di ricerca per la matematica e per le arti grafiche¹



Figura 1: Un mosaico dell'Alhambra



Chi più di ogni altro ha cercato di approfondire entrambi gli aspetti della questione è senza dubbio il grafico olandese **Maurits Cornelis Escher** (1898 – 1972). Consapevole dell'unicità dell'Alhambra, si spinse due volte fino alla Spagna - nel 1922 e nel 1936 - per contemplare e studiare quella che lui stesso non esitò a definire "la più ricca fonte di ispirazione mai incontrata".

La religione islamica impedisce di rappresentare animali o figure umane; per questo motivo tutti i moduli dell'Alhambra - così come in tutte le altre tassellazioni prodotte da artisti islamici - sono esclusivamente geometrici.

Figura 2: M.C. Escher

Fin dal suo primo viaggio Escher cercò di spingersi oltre questo limite, e la sua prima opera di questo tipo è una tassellazione del piano con otto volti umani (*Otto teste*, 1922). Con gli anni saranno proprio uomini e soprattutto animali a stimolare la sua fantasia, e riuscirà a ricoprire il piano con conchiglie, stelle marine, granchi, pesci, uccelli, cavalieri...



Figura 1: Otto teste

¹ Qualcuno si è posto anche la domanda contraria: è possibile tassellare il piano con gli stessi moduli disposti in maniera non-periodica, ovvero mai prevedibile? La risposta è sì, e la dobbiamo al matematico Roger Penrose (1931 -), che è riuscito a trovare due tasselli - detti dardo e aquilone - coi quali l'operazione è possibile.

È curioso osservare che solo dopo i lavori di Penrose si è scoperto che alcuni cristalli hanno una struttura aperiodica.

A proposito di *Studio di divisione regolare del piano con rettili*, uno dei suoi tanti disegni di questo tipo, l'autore commenta così:

"Che cosa è stato realizzato con l'ordinata suddivisione della superficie (...)? Non ancora il vero infinito, ma comunque un frammento di esso, un pezzo dell'universo dei rettili. Se la superficie in cui essi si inseriscono fosse infinitamente grande, un numero infinito di essi potrebbe esservi rappresentato".

Lo stesso procedimento di replicazione per generare l'infinito è stato utilizzato dallo scrittore argentino **Jorge Luis Borges** (1899-1986) nella descrizione de *La Biblioteca di Babele* (contenuto in *Finzioni*, 1944).

L'universo (che altri chiama la Biblioteca) si compone di un numero indefinito, e forse infinito, di gallerie esagonali. [...] Da qualsiasi esagono si vedono i piani superiori e inferiori interminabilmente. [...] Nel corridoio è uno specchio, che fedelmente duplica le apparenze. Gli uomini sogliono inferire da questo specchio che la Biblioteca non è infinita (se realmente fosse tale, perché questa duplicazione illusoria?). Io preferisco pensare che queste superfici argentate figurino e promettano l'infinito... [...] Io affermo che la Biblioteca è interminabile.

Si noti la presenza di termini fortemente indicativi come "indefinito, e forse infinito", "interminabilmente", nonché di uno specchio (ancora!) che "figura e promette l'infinito"². Non soffermandoci sulla comprensione della struttura effettiva della Biblioteca, è comunque chiaro che siamo ancora una volta di fronte al medesimo fenomeno di replicazione: da ogni esagono "si sa come continua" la struttura, pur senza vedere l'intera infinità di celle.



Figura 2: David Hilbert

La Biblioteca di Borges ha un alter ego.

Il matematico **David Hilbert** (1862 – 1943), dovendo spiegare gli strani comportamenti dell'infinito, utilizzava l'immagine di un albergo con infinite stanze. L'Hotel Hilbert può sempre, pure al completo, ospitare un'ulteriore persona. È infatti sufficiente far scorrere tutti gli ospiti di una stanza, in modo che chi occupa la stanza #1 finisca nella #2, il cui utente sarà nel frattempo passato alla stanza #3, e così via.

In questo modo tutti avranno ancora una stanza, e la #1 sarà pronta ad accogliere il nuovo ospite. Se poi dovessero presentarsi più persone, sarà

sufficiente far scorrere tutti del numero di nuovi arrivati.

La situazione diventa più difficile da risolvere se si dovessero presentare *infiniti* nuovi ospiti. La reception dell'Hotel Hilbert è in grado di gestire anche questa situazione, e la soluzione consiste ancora nel

² Le replicazioni islamiche hanno in fin dei conti il medesimo intento: figurare e promettere l'infinito.

riassegnare le camere. Questa volta si procederà nel modo seguente: ognuno si sposterà nella stanza contrassegnata dal numero che è il doppio della propria.

Chi occupava la stanza #1 andrà nella #2, chi occupava la #2 finirà nella #4, e così per tutti. Ed ecco che si sono liberate infinite stanze: tutte le stanze contrassegnate da un numero dispari sono infatti libere, e i nuovi ospiti possono tranquillamente occuparle!

Tutte queste forme di infinito (dalle tassellazioni dell'Alhambra all'Hotel Hilbert) si basano su oggetti con dimensioni indefinitamente accrescibili. Questo tipo di infinito si chiama *infinito potenziale*. Esiste tuttavia un altro tipo di infinito, chiamato *infinito attuale*. Viene detto *attualmente* infinito un oggetto la cui dimensione è superiore a quella di ogni altro oggetto. Le inevitabili implicazioni filosofiche e religiose di questa definizione hanno sempre creato ambiguità, e soprattutto feroci osteggiatori, che ritenevano l'essere superiore una qualità attribuibile soltanto ora all'Essere, ora all'Assoluto, ora a Dio.

Uno dei più accaniti oppositori dell'infinito attuale è stato **Aristotele** (384 – 322 a.C.). Dal terzo libro della *Fisica* leggiamo:

È conforme a ragione che nella serie numerica il più piccolo sia il termine, ma che procedendo verso un numero maggiore, ogni quantità venga superata...procedendo verso il più grande, non c'è grandezza infinita. [...] Sicché il numero è infinito in potenza, ma non in atto.

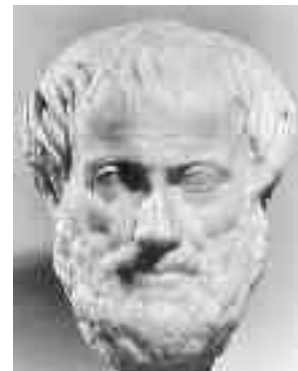


Figura 3: Aristotele

Sotto il severo giogo intellettuale di Aristotele, **Euclide** (~325 – 265 a.C.) dovette evitare accuratamente l'infinito attuale nei suoi *Elementi*³. Leggiamo allora in quest'ottica il Postulato II:

Ogni retta terminata [oggi diremmo segmento], n da] può essere prolungata continuamente per dritto.

Ogni altra definizione di retta avrebbe dovuto parlare di lunghezza attualmente infinita. Allo stesso modo, la celebre Proposizione 20 del libro IX afferma:

Esistono numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre.

Anche qui Euclide ha evitato la definizione più semplice, ma che implicava l'infinito attuale: *i numeri primi sono infiniti*.

³ Sembra che Euclide non fosse affatto contrario all'infinito attuale, ma che per poter diffondere le proprie idee le ripulì attentamente da tutto quello che avrebbe potuto impedirne la circolazione.

Con i secoli le cose non sono cambiate molto: nella sua *Critica alla ragion pura* (1781), **Immanuel Kant** (1724 – 1804) afferma che non esiste l'infinito attuale, perché ci vorrebbe un tempo infinito per concepirlo in ogni sua parte.

In realtà tutti i difensori dell'infinito potenziale si sono sempre dovuti scontrare con un'altra evidenza di infinito, di natura completamente diversa - e molto più insidiosa.

Esiste infatti un altro modo di generare infiniti mediante simmetrie, utilizzando non più la *moltiplicazione* reiterata, ma la *divisione* reiterata.

Dividere all'infinito

Nel V secolo a.C. **Zenone di Elea** (~490 – 425 a.C) andava raccontando il suo paradosso di Achille e la Tartaruga. Secondo il filosofo, in una ipotetica gara tra i due - in cui viene concesso per galanteria un metro di vantaggio alla Tartaruga - l'agile corsa di Achille pie' veloce non basterà per vincere.

L'argomentazione portata è la seguente: nel tempo impiegato da Achille per colmare la distanza che lo separa dalla sua avversaria, la Tartaruga compirà qualche passo; questi le permetteranno di mantenere, seppur ridotto, il vantaggio. A questo punto si ripropone - per simmetria, se vogliamo - la medesima situazione: Achille deve colmare una distanza che lo separa dall'avversaria. Quindi, dovessero correre anche per giorni, la vincitrice sarà comunque la Tartaruga ⁴.

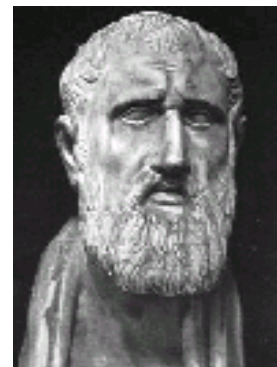


Figura 4: Zenone di Elea

Di questo paradosso, quasi 2 500 anni dopo, J.L. Borges scriverà:

Le implicazioni della parola gioiello - preziosa piccolezza, delicatezza non soggetta alla fragilità, facilità somma di trasporto, limpidezza che non esclude l'impenetrabilità, fiore per gli anni - la rendono di uso legittimo qui. Non conosco migliore qualifica per il paradosso di Achille, tanto indifferente alle decisive confutazioni che da più di ventitré secoli l'aboliscono, che ormai possiamo salutarlo immortale.

Le ripetute visite al mistero che tale lunga durata postula, le sottili ignoranze a cui essa ha invitato l'umanità, sono generosità di fronte alle quali non possiamo non sentire gratitudine. Viviamolo ancora una volta, anche se solo per convincerci di perplessità e di intimo arcano.

(da *La perpetua corsa di Achille e la tartaruga*, Discussioni 1931)

⁴ Zenone propose anche delle varianti al suo paradosso. Una vede un atleta correre per l'eternità nello stadio, perché nell'affrontare l'intero miglio deve prima percorrerne metà, e poi metà della metà rimasta, e ancora metà della metà della metà rimasta...

L'altra variante, la cui argomentazione è identica alla precedente, è quella di una freccia che non raggiungerà mai il bersaglio.

Sempre in *Discussioni*, Borges parla delle molteplici "metempsicosi" della Tartaruga. Viviamone ancora qualcuna, che per ovvi motivi cronologici non compaiono negli scritti dell'argentino.



Figura 5: Limite del cerchio III

Il solito M.C. Escher dedicò molto tempo alla realizzazione di opere in cui si potesse davvero "vedere l'infinito". Ne nacque una serie di xilografie in cui per passare dal centro al bordo si è costretti ad superare un'infinità di oggetti, di volta in volta più piccoli ⁵.

Uno splendido esempio tratto da questa serie è *Limite del cerchio III* (1959). Qui siamo costretti ad accettare il fatto che il numero di pesci racchiuso nella circonferenza è effettivamente superiore a ogni numero finito.

In *Serpenti* (1972) il numero di anelli non è infinito soltanto spostandosi verso la periferia del quadro, ma anche verso il suo centro.

Dopo la realizzazione di questa incisione - l'ultima della sua vita - il grafico olandese disse: "Il vero limite non è la precisione della mano, che si riesce a educare, ma la sensibilità della vista, che oltre certe dimensioni non funziona più".



Figura 6: Serpenti

Esistono anche delle metempsicosi letterarie. Nel 1978 **Giovanni Sabato** pubblica *Sconfitte*, in cui troviamo

Come ogni volta

Dell'Eleatico rifeci - e rifarò -

l'errore.

Mi avvicinai, freccia,

a te, bersaglio,

per non toccarti mai.

Ma $\sum_{0}^{\infty} 1/2^n$ converge, come me,

rapidamente a due.

Ti amo ⁶

⁵ La grossa ispirazione per questi quadri venne dall'incontro con il matematico londinese Harold Scott Macdonald Coxeter (1907 – 2003), che gli fece conoscere il cosiddetto modello di Poincaré del piano iperbolico, basato sulla negazione del V postulato di Euclide.

Se poi si volessero cercare metempsicosi nella vita quotidiana, è sufficiente pensare alla valigia prima del viaggio, nella quale, purché sufficientemente piccolo (o opportunamente pressato), c'entra sempre qualcos'altro...!

La difficile storia dell'infinito attuale è durata millenni, e nei secoli non sono stati pochi i precursori che hanno costruito le basi alla concezione moderna di infinito.

Nel 1638, in *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, **Galileo Galilei** (1564 – 1642) scrive:

Nel numero infinito, se concepir lo potessimo, bisognerebbe dire,
tanti essere i quadrati quanti tutti i numeri insieme.

Galileo si accorge che i quadrati perfetti (1, 4, 9, 16, 25...) possono essere messi in relazione biunivoca con i numeri naturali (1, 2, 3, 4, 5...).

La dimostrazione è molto semplice: è sufficiente associare ogni numero naturale al suo quadrato e ogni quadrato alla sua radice.

1	2	3	4	5	6	7	...	
	1	4	9	16	25	36	49	...

Ma la cosa gli sembra sospetta: come è possibile che un insieme ⁷ (i numeri naturali) abbia lo stesso numero di elementi di un suo sottoinsieme proprio (i quadrati perfetti)? Galileo non approfondirà più la questione, liquidandola con un *se concepir lo potessimo*.

Passeranno ancora più di due secoli senza che nessuno affronti di petto la questione. Nei suoi *Paradoxien des Unendlichen*, **Bernhard Bolzano** (1781 – 1848), un prete boemo con la passione per la matematica, osserva gli strani comportamenti dell'infinito che già Galileo aveva intravisto, e si scaglia contro chi ritiene che l'infinito attuale non possa essere accettato per motivi filosofici o religiosi.

Dall'edizione italiana (*I paradossi dell'infinito*, Feltrinelli, 1965) leggiamo:

Le affermazioni paradossali che si incontrano in matematica sono certamente
per la maggior parte, benché non tutte, proposizioni che o contengono in modo
immediato il concetto di infinito, o si fondano in qualche modo su tale concetto

⁶ Il "geroglifico" indica $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$, che in effetti fa 2. Qui altro non è che la somma della lunghezza di tutti i segmenti che separano la freccia dal bersaglio.

⁷ In realtà il concetto di insieme è stato introdotto soltanto due secoli dopo da Bernhard Bolzano.

attraverso la dimostrazione per esse proposta. Ancor meno discutibile è il fatto che tale categoria di paradossi matematici includa precisamente quelli che meritano il nostro esame più accurato, in quanto la soluzione di problemi molto importanti di altre scienze, come la fisica e la metafisica, dipende da una soddisfacente confutazione delle loro apparenti contraddizioni.

e ancora

Che l'infinito sia contrapposto ad ogni mero finito è già espresso nel termine stesso. I matematici hanno fatto uso del termine infinito in altro senso che questo: se trovano una quantità maggiore di qualsiasi numero di unità assunte, la chiamano infinitamente grande; se trovano una quantità così piccola che ogni suo multiplo è minore dell'unità, la chiamano infinitamente piccola; né riconoscono alcuna altra specie di infinito oltre queste due e oltre specie da esse derivate, infinitamente più grandi o infinitamente più piccole, che discendono tutte dallo stesso concetto. Alcuni filosofi però, per esempio Hegel e i suoi seguaci, non sono soddisfatti di questo infinito dei matematici e lo chiamano con disprezzo cattiva infinità, rivendicando la conoscenza di un infinito molto superiore, il vero infinito, l'infinito qualitativo, che essi trovano solo in Dio, e in generale nell'Assoluto.



La fermezza delle proprie posizioni costò al sacerdote boemo l'accusa di razionalismo da parte dell'autorità ecclesiale. Fu per questo motivo sottoposto a un lungo e umiliante processo (1821-1825), durante il quale cercò di mostrare la compatibilità tra la dottrina cristiana e le sue idee.

La pubblicazione postuma⁸ di molte sue opere gli assegnerà a posteriori - seppur non ancora nelle dovute proporzioni - il ruolo determinante che ha avuto nella storia della matematica.

Alla sua morte, Bolzano lasciava al mondo matematico molte questioni non risolte, ma anche l'eredità di uno strumento che si rivelerà poi fondamentale per lo studio dell'infinito: la teoria degli insiemi.

Alla base del lavoro di **Georg Cantor** (1845 – 1918) sta una domanda: *Quanti sono i numeri naturali?* Come già Galileo se n'era accorto, questo numero (*se concepir lo potessimo!*) è esattamente il numero dei quadrati perfetti, ma è anche il numero dei pari (o dei dispari), dei divisibili per 11, ecc. Per rispondere alla

⁸ I Paradossi stessi sono stati pubblicati da un suo allievo nel 1851, a tre anni dalla sua morte; molti altri suoi lavori sono rimasti manoscritti fino al 1862.

domanda è importante chiarire bene cosa significhi contare, ossia assegnare un numero cardinale⁹ a un insieme di oggetti.

Noi diciamo essere nello stesso numero i vizi capitali e i nani di Biancaneve perché possiamo a ogni nano associare un vizio e a ogni vizio un nano, senza che nessun nano o vizio rimanga spaiato.

Figura 7: Georg Cantor

Tutti gli insiemi che possono essere trattati in questo modo (come i giorni della settimana, o i bracci del candelabro ebraico) hanno ancora lo stesso numero di elementi. Se invece qualche elemento dell'insieme rimane senza vizio (come nel caso dei pianeti del sistema solare), diciamo che gli elementi sono di più; se invece a rimanere spaiato è qualche vizio (come nel caso dell'insieme dei componenti dei Beatles), diciamo che gli elementi sono di meno.

Che poi il numero dei vizi (o dei nani, o dei giorni della settimana) sia sette o novecentosettantatre non è rilevante¹⁰.

Cantor sapeva bene che nessun numero cardinale finito poteva rispondere alla sua domanda, e ne forgiò uno appositamente. Per dargli nome e simbolo attinse all'alfabeto ebraico, e ne rubò la prima lettera. Chiamò quindi il suo infinito \aleph_0 (aleph zero). Ecco che era nato finalmente l'infinito attuale: \aleph_0 è effettivamente un cardinale più grande di tutti i cardinali finiti.

Così Cantor aveva trovato la risposta alla domanda *Quanti sono i numeri naturali?* Risposta: Sono \aleph_0 . Ma questa sarà la risposta anche alle domande *Quanti sono i numeri pari? Quanti i dispari? E i numeri primi? I quadrati perfetti?* O ancora: *Quante sono le stanze dell'Hotel Hilbert?*

Ovviamente questa "creazione" venne vista di cattivo occhio da parte di filosofi e teologi. Ma anche una buona parte della comunità scientifica si oppose alla diffusione delle idee di Cantor, in maniera particolare Leopold Kronecker (1823 – 1891) e Gösta Mittag-Leffler (1846 – 1927)¹¹, allora matematici influenti.

⁹ I numeri cardinali sono quelli che rispondono alla domanda "Quanti". Non vanno confusi con i numeri ordinali, che rispondono alla domanda "A che punto della sequenza". Ad esempio il numero 10 sulla banconota da dieci euro è un cardinale perché indica a quanti euro corrisponde quella banconota, mentre il numero 10 sulla maglia di Maradona è un ordinale.

¹⁰ È curioso notare come questa concezione del numero sia tipicamente occidentale. Nella lingua cinese, ad esempio, il tre di "tre ombrelli chiusi" non è lo stesso tre di "tre ombrelli aperti".

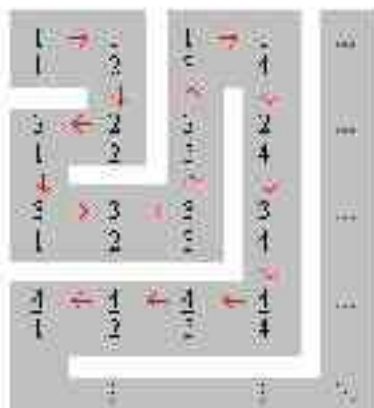
Il motivo? Perché il primo è un oggetto lungo e sottile, rigido ma flessibile e con sezione circolare, mentre il secondo è un oggetto con una superficie piatta e sottile!

¹¹ Nel 1885 Mittag-Leffler rifiutò di pubblicare sulla sua rivista Acta Mathematica un articolo di Cantor perché "cent'anni in anticipo". Cantor, seppure alle prese con la sua prima grossa crisi depressiva, ci scherzò su: "Se Mittag-Leffler ha deciso così, dovrei aspettare il 1984. Per me è un po' troppo". Ovviamente non ebbe più rapporti con la rivista.

Tuttavia questa ostilità non dissuase¹² il padre dell'infinito attuale, che continuò la sua ricerca intorno all'argomento. La prossima domanda alla quale rispondere era <i>Quanti sono i numeri razionali (ovvero le frazioni)?</i> Cantor aveva il sentore che anche a questa domanda la risposta fosse \aleph_0 , ma necessitava di una dimostrazione che non fosse confutabile. Tutto consisteva nel trovare una relazione biunivoca tra i numeri razionali e i numeri naturali, ovvero trovare un modo per far entrare nell'Hotel Hilbert tutte le frazioni.

Nel 1874 riuscì a completare la dimostrazione. Qualche anno dopo tuttavia riuscì a migliorare radicalmente il suo lavoro, costruendo quella che oggi viene considerata l'unica dimostrazione del fatto che i razionali sono \aleph_0 . Vale la pena riportarla per la sua semplicità ed eleganza.

Scrivendo le frazioni come nella Figura 8 (con lo stesso numeratore sulle righe e lo stesso denominatore sulle colonne) e percorrendole a serpentina, ecco che si può assegnare una stanza a ogni frazione.



La stanza #1 viene quindi assegnata a 1/1, la #2 a 1/2, la #3 a 2/2, la #4 a 2/1, e così via, seguendo la spirale. Ecco che ad ogni numero razionale (ogni frazione) viene associato un numero naturale (il numero della stanza), e viceversa.

Domanda: *Quanti sono i numeri razionali?*

Risposta: \aleph_0 !

Figura 8

A questo punto la tentazione di affermare che tutti gli insiemi infiniti contenessero \aleph_0 elementi era forte. Ma la grossa sorpresa venne quando Cantor scoprì che non è così. Partendo da un insieme qualsiasi (finito o infinito), esiste infatti un modo molto semplice per creare un insieme con un numero di elementi superiori a quello di partenza¹³. Applicando quindi questo procedimento a un insieme con \aleph_0 elementi, si ottiene un insieme con più di \aleph_0 elementi, ovvero più infinito dell'infinito! Esiste quindi anche \aleph_1 , ovvero un numero

¹² Oggi si sta rimettendo in discussione l'idea diffusa per la quale alla base delle crisi depressive di Cantor ci fosse la difficoltà di affermare le proprie idee.

cardinale corrispondente all'insieme appena costruito che è strettamente maggiore di \aleph_0 . Ma così facendo sarà sufficiente reiterare il procedimento per ottenere infiniti *infiniti*...

In realtà Cantor si era accorto che non è necessario ricorrere a costruzioni particolari per avere insiemi con più di \aleph_0 elementi. È sufficiente infatti prendere l'insieme dei numeri reali, e mediante una dimostrazione semplicissima ci si accorge che è un insieme che deve necessariamente avere più elementi dell'insieme dei numeri naturali.

In poche parole è impossibile ospitare nell'Hotel Hilbert tutti i numeri reali ¹⁴.

Cantor aveva così non soltanto osato aprire la porta dell'infinito, ma ne aveva anche varcato la soglia, affrontando in solitaria tutte i nuovi problemi che andava via via scoprendo.

Lo stupore di fronte alle proprie scoperte non risparmiò neppure lo stesso Cantor, che scrisse una volta al matematico Richard Dedekind (1831 – 1916), uno dei suoi pochi amici: Lo vedo ma non ci credo! Nel 1926 Hilbert proclamava, non senza enfasi:

Nessuno ci scaccerà mai dal paradiso che Cantor ha creato per noi.

¹³ Prendendo un insieme qualsiasi A , l'insieme dei suoi sottoinsiemi viene chiamato insieme delle parti e indicato con $P(A)$. Ebbene $P(A)$ ha sempre più elementi di A .
 Prendiamo ad esempio l'insieme $A=\{a,b,c\}$; il suo insieme delle parti $P(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ ha otto elementi, rispetto ai tre di partenza. Questo avviene anche se l'insieme di base ha un numero infinito di elementi.

¹⁴ Anche questa dimostrazione è semplice quanto elegante. Per comodità lavoriamo sui numeri reali tra 0 e 1, e li scriviamo come uno zero seguito dalla successione delle cifre dopo la virgola. Supponiamo di aver assegnato a ognuno di loro una stanza dell'Hotel Hilbert.

La stanza #1 sarà occupata dal numero $a_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \dots$

La stanza #2 sarà occupata dal numero $a_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \dots$

La stanza #3 sarà occupata dal numero $a_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \dots$

La stanza #4

Cerchiamo a questo punto in che stanza è sistemato il numero b così fatto: la sua prima cifra dopo la virgola è diversa da a_{11} , la sua seconda cifra è diversa da a_{22} , la sua terza cifra è diversa da a_{33} , e così la sua k -esima cifra è diversa da a_{kk} .

È chiaro che b non è nella prima stanza perché ha la prima cifra diversa da a_1 non è nella seconda perché ha la seconda cifra diversa da a_2 non è nella k -esima stanza perché ha la k -esima cifra diversa da a_k . Quindi b è rimasto fuori dall'Hotel!



Infinity Circle [Scott Kim, 1981]