

La matematica e i suoi modelli

Un esempio tratto dalla vita quotidiana

Scheda 1

0. *Che cos'è una scheda di lavoro?*

1. *Una cartina della rete ferroviaria*

2. *Che cosa viene rappresentato fedelmente?*

3. *Diverse rappresentazioni cartografiche*

4. *I modelli matematici*

5. *Esercizi*

0. Che cos'è una scheda di lavoro?

Lo studio della matematica che affronteremo insieme in classe sarà in gran parte guidato da schede di lavoro come quella che stiamo leggendo in questo momento.

Alcuni di voi probabilmente hanno già usato schede di lavoro nella scuola elementare o nella scuola media. Gli altri faranno comunque presto a prendere confidenza con questo strumento.

Una scheda di lavoro è in genere costituita da parti di testo in cui vengono presentati o discussi alcuni argomenti e da parti che l'alunno deve completare per approfondire o trovare risposte ad alcune questioni.

La lettura della scheda e le risposte ai quesiti proposti devono essere affrontate a volte individualmente, altre volte collettivamente insieme ai compagni e all'insegnante.

Il lavoro durante l'anno scolastico verrà articolato in unità didattiche. Le unità didattiche nell'insegnamento sono più o meno come i capitoli in un libro: in esse vengono raggruppati argomenti che sono simili o affini o che sono collegati dal filo del discorso che viene seguito.

Ogni unità didattica avrà un titolo che ne esprimerà in forma assai sintetica il contenuto e che verrà ripreso nelle schede di lavoro che useremo durante il suo svolgimento.

Ad esempio questa è la prima scheda (*scheda 1*) di *La matematica e i suoi modelli*, unità didattica introduttiva, che cerca di dare un'idea di come studieremo la matematica durante l'anno.

Naturalmente non tutto il lavoro sarà guidato o svolto su schede di lavoro. A volte le lezioni saranno condotte direttamente dall'insegnante, a voce e con l'ausilio della sola lavagna. A volte saranno i singoli alunni che dovranno cercare di spiegare in maniera comprensibile ai compagni alcuni argomenti o la soluzione di alcuni problemi. A volte si lavorerà nel laboratorio computazionale (cioè in un'aula attrezzata con personal computer, che d'ora in poi chiameremo più semplicemente *aula computer*. ...

1. Una cartina della rete ferroviaria

Consideriamo un genere di situazioni in cui prima o poi quasi tutti, con maggiore o minore frequenza, si imbattono: *dover scegliere l'itinerario e l'ora in cui affrontare un viaggio in treno*

I coniugi Van Per Tren, una coppia di olandesi che nell'estate 1991 stanno trascorrendo le vacanze in Italia, vogliono trasferirsi col treno da Bologna a Vicenza, partendo al mattino fra le 8 e 30 e le 11. Consultano l'orario ferroviario che hanno acquistato presso un'edicola per decidere quale percorso seguire.

Per individuare le linee impiegabili esaminano l'*indice grafico* stampato nella prima pagina dell'orario: una cartina in cui sono riprodotte le linee ferroviarie e sono indicati i relativi quadri dell'orario.

dom.

112		2218	30	56		2062	2078	656	1176
		Dir	EC			Dir	Dir	IC	Expr.
km		1,2 cl.	1,2 cl.	km		1,2 cl.	1,2 cl.	1,2 cl.	1,2 cl.
0	Bologna	840	1040	0	Venezia		1035	1145	1150
...				
47	Ferrara	912	-	37	Padova	1102	1116	1221	1228
...	...			47	Mestrino	-	-	-	-
80	Rovigo	931	-	52	Grisignano	1112	-	-	-
...	...			60	Lerino	1119	-	1134	-
123	Padova	1006	1146	68	Vicenza	1127	1136	1240	1249

2 Esaminate i quadri (che abbiamo riprodotto parzialmente) e stabilite quale dei due itinerari è più corto.

chilometri percorsi con l'itinerario BO - VR - VI:

chilometri percorsi con l'itinerario BO - PD - VI:

3 L'itinerario individuato è anche il più breve, cioè quello che comporta un tempo di percorrenza inferiore? Perché?

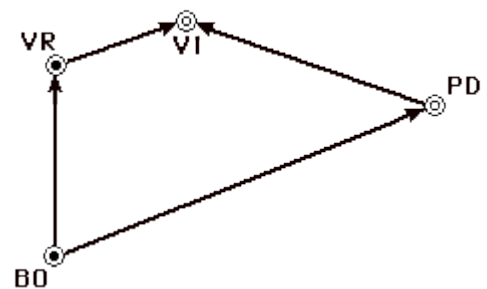
4 Se foste al posto dei Van Per Tren quali treni prendereste?

2. Che cosa viene rappresentato fedelmente?

Il signor Van Per Tren non capisce come sia possibile che l'itinerario che sulla cartina appare molto più corto sia in realtà più lungo (→ quesito 2). Si rende conto che nella cartina la descrizione delle linee ferroviarie è stata semplificata impiegando tratti rettilinei per cui un itinerario potrebbe essere molto più lungo di come appare. D'altra parte, poiché si tratta di linee che attraversano la pianura, gli sembra improbabile la presenza di numerose curve.

Prende allora la sua guida turistica dell'Europa e si posiziona sulla pagina che contiene la rappresentazione cartografica dell'Italia.

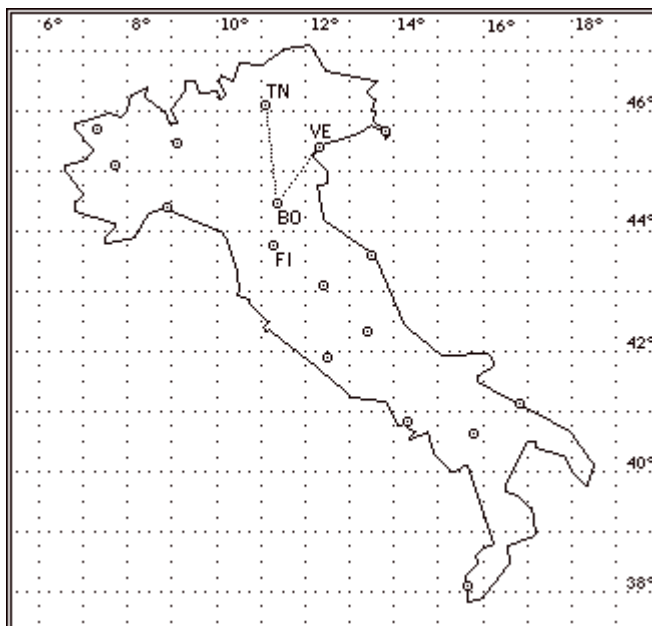
La cartina (riprodotta parzialmente nella figura 2: abbiamo ommesso le isole e abbiamo segnalato solo i capoluoghi di regione) presenta una reticolatura che consente di individuare



la posizione di una località note le sue coordinate geografiche (longitudine e latitudine). La guida contiene infatti un elenco in ordine alfabetico di numerose località con l'indicazione delle loro coordinate.

Ad esempio Firenze ha coordinate $11^{\circ} 16' E$ (longitudine), $43^{\circ} 45' N$ (latitudine).

figura 2



Nella figura 3 è richiamato mediante un'illustrazione il significato delle *coordinate geografiche*.

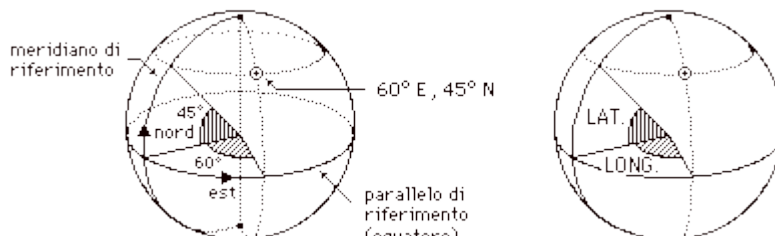


figura 3

Confrontando le due cartine i Van Per Tren si rendono conto immediatamente che nella prima cartina (\rightarrow fig. 1) le località non sono disposte come nella seconda (\rightarrow fig. 2). Per curiosità, aiutandosi con una piccola riga graduata e con la calcolatrice tascabile, calcolano il rapporto tra le distanze in linea d'aria di Bologna da Venezia e da Trento così come risultano dalla seconda cartina; poi calcolano il rapporto tra le stesse distanze così come appaiono sulla prima cartina e confrontano i due rapporti ottenuti.

5 Facciamo anche noi lo stesso confronto. Che cosa possiamo concludere?

L'indice grafico, cioè la cartina riprodotta nella figura 1, non rappresenta le linee ferroviarie con totale fedeltà.

Abbiamo potuto osservare subito, confrontando i quadri orari, che non sono segnalate tutte le stazioni ferroviarie, ma solo quelle delle località principali o che sono capilinea o nodi in cui si incontrano più tratti di linea ferroviaria.

Abbiamo poi visto che le lunghezze dei tratti che congiungono le stazioni sono sproporzionate.

Ma, allora, *quali aspetti vengono riprodotti fedelmente?*

- (*) Viene riprodotto fedelmente l'ordine in cui le stazioni rappresentate si susseguono lungo le varie linee ferroviarie.
- (**) Viene inoltre conservato l'ordine con cui i diversi tratti di linea si innestano in un nodo ferroviario.

6 Nella figura 4 sono riprodotte porzioni di tre possibili indici grafici (sono stati omessi i riferimenti numerici ai quadri). Quali conservano entrambi gli aspetti sopra indicati? Quali non li conservano, e perché?

.....

.....

.....

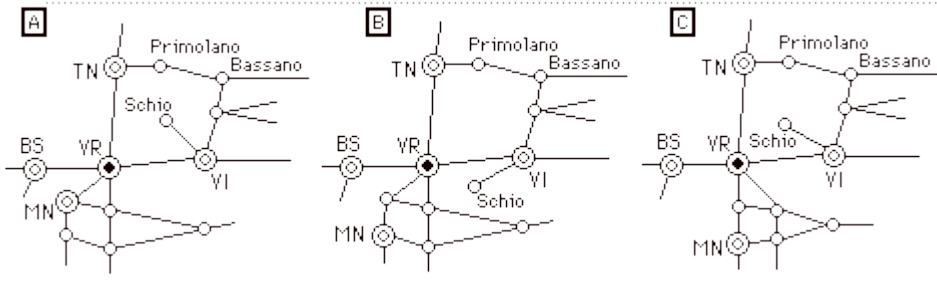


figura 4

3. Diverse rappresentazioni cartografiche

Abbiamo usato la cartina della ➡ figura 2 per concludere che l'indice grafico (➡ figura 1) non rappresenta fedelmente le distanze tra le località.

Ma la cartina della figura 2 rappresenta fedelmente le distanze?

Una nave che da Genova proceda verso sud scendendo di un grado di latitudine percorre 111 km circa (100 metri più, 100 metri meno). Percorre la stessa distanza se parte da Bari e sale di un grado di latitudine.

In generale la distanza sulla superficie terrestre tra un parallelo e quello che ha un grado in più di latitudine è di circa 111 km, e questo vale sia presso l'equatore che presso i poli. Quindi nel globo rappresentato nella figura 5 la distanza che intercorre tra due qualunque paralleli successivi (in questo globo i paralleli tracciati differiscono l'uno dall'altro per 15° di latitudine) corrisponde in ogni caso a circa $111 \cdot 15 = 1665$ km.

Invece la distanza tra un meridiano e quello che ha un grado in più di longitudine può differire notevolmente da una zona all'altra.

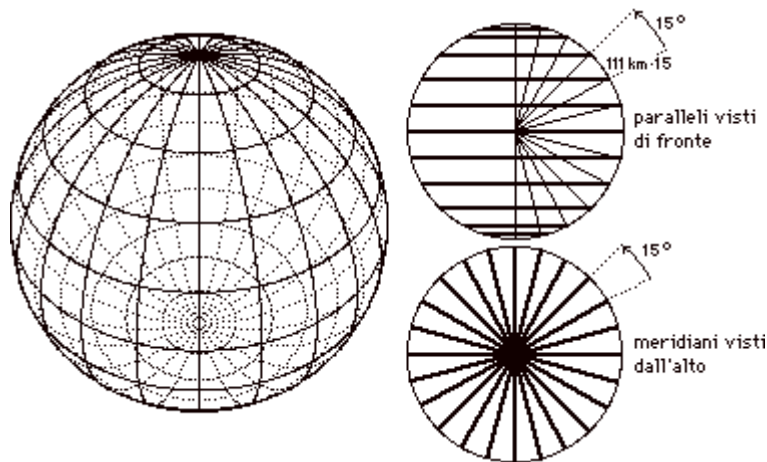
7 Quanti chilometri corrispondono a uno spostamento di un grado di longitudine lungo l'equatore? Avvicinandosi ai poli la distanza tra due qualunque meridiani a quale valore tende?

.....

.....

.....

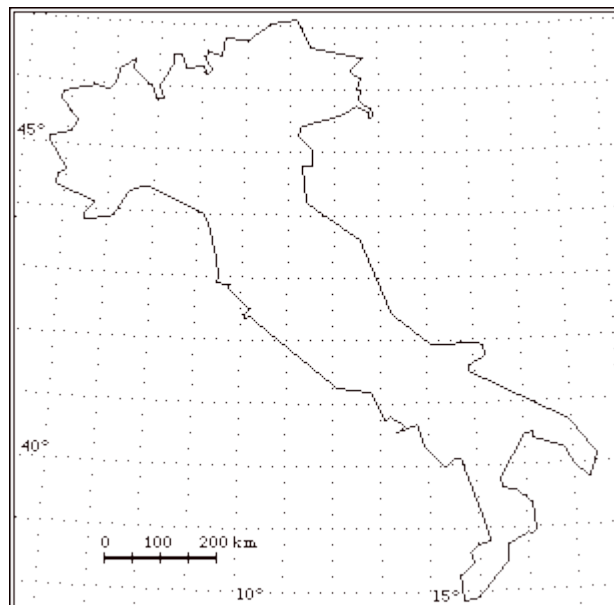
figura 5



Nella cartina di ➔ figura 2 la distanza tra due meridiani rimane immutata spostandosi da sud a nord, mentre in realtà due meridiani che differiscono per un grado di longitudine a Reggio Calabria distano circa 87 km e a Trento circa 77 km. Quindi neanche questa cartina rappresenta fedelmente le distanze: dilata orizzontalmente le zone meridionali e contrae orizzontalmente le zone settentrionali, anche se di poco.

La cartina di figura 6 rappresenta con maggiore fedeltà le distanze.

figura 6



Tuttavia neanche questa cartina è del tutto fedele (➔ quesito 17). *Nessuna cartina può essere una perfetta riproduzione in scala di una porzione della superficie terrestre. E la riproduzione è inevitabilmente tanto meno precisa quanto più grande è la superficie da rappresentare.*

8 Perché?

.....

.....

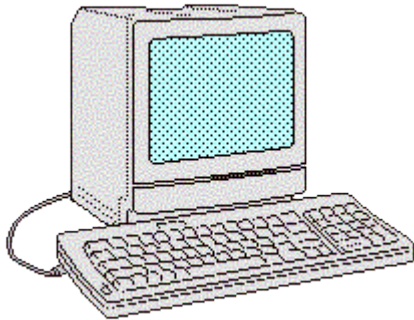
.....

Come avrai notato, le cartine delle figure 2 e 6 non hanno i contorni lisci. Sono state, infatti, tracciate mediante un piccolo *personal computer*. Le immagini prodotte sullo schermo del calcolatore, che appaiono costituite da tanti piccoli rettangolini (figura 7), sono state poi riportate su

carta mediante una stampante.

figura 7

Ingrandimento di come può apparire sullo schermo di un calcolatore la parola ROMA sottolineata con un tratto punteggiato. I punti vengono rappresentati con rettangolini luminosi e i segmenti e le curve che compongono le lettere vengono approssimate con insiemi di rettangolini.



La realizzazione delle immagini è stata eseguita fornendo al calcolatore le coordinate geografiche di moltissimi punti del contorno dell'Italia peninsulare e facendogli calcolare le posizioni dei rettangolini dello schermo con cui rappresentare i vari punti.

Il modo in cui effettuare questo calcolo è stato comunicato al calcolatore mediante un *programma*, cioè una sequenza di istruzioni (battute attraverso la tastiera) con cui si sono descritte le varie formule e i vari procedimenti da impiegare per ottenere, date le coordinate geografiche di un punto, le *coordinate schermo* del rettangolino con cui rappresentarlo.

Cambiando il programma si possono ottenere diverse rappresentazioni piane (cioè diversi tipi di cartine) dell'Italia o (se si forniscono i dati opportuni) di altre porzioni della superficie terrestre.

Un tempo questi calcoli venivano fatti a mano. L'uso del calcolatore ha solamente facilitato e sveltito il lavoro.

Naturalmente, fornendo le coordinate geografiche di più punti e impiegando dei calcolatori e delle stampanti più sofisticate si possono ottenere rappresentazioni cartografiche con i contorni più precisi. Ma, come abbiamo visto, per quanto si possa migliorare la precisione con cui tracciare i contorni, le rappresentazioni che si ottengono, essendo piane, non possono riprodurre fedelmente parti della superficie terrestre.

4. I modelli matematici

Nessuna delle *cartine* considerate riproduce esattamente ciò che rappresenta. Per altro alcune sono più fedeli di altre, ma ciò non vuol dire che siano migliori:

– Se l'indice grafico fosse stato tracciato su una cartina come quella di ➔ fig. 6 avremmo sì ottenuto una rappresentazione più fedele della posizione delle varie località, ma di più difficile lettura. Invece l'editore dell'orario ha modificato opportunamente la collocazione spaziale delle diverse stazioni in modo da facilitare la lettura dei nomi delle località e dei numeri dei quadri relativi alle varie linee. All'utente che consulta l'orario non interessa infatti che siano conservati i rapporti tra le distanze o gli angoli formati dalle linee che si incontrano in un nodo, ma interessa solamente l'ordine con cui si susseguono le varie stazioni e un'indicazione approssimativa delle direzioni delle diverse linee.

– La cartina di ➔ figura 2, che rappresenta meno fedelmente distanze e angoli rispetto alla cartina di figura 6, in cambio, avendo un sistema di riferimento ortogonale (paralleli e meridiani rappresentati con rette tra loro perpendicolari) offre una lettura più facile delle coordinate.

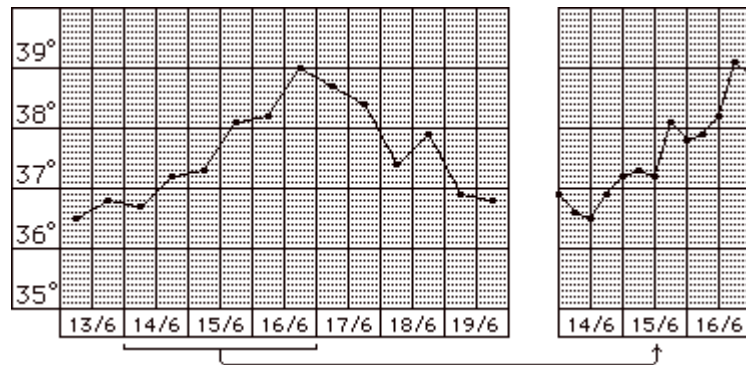
Possiamo dire che le diverse rappresentazioni cartografiche di una certa regione della superficie terrestre sono differenti *modelli* di essa.

Facciamo qualche altro esempio di modello.

Il **diagramma** in *figura 8* è un modello che rappresenta la temperatura corporea di una persona degente in ospedale.

figura 8

Diagramma della temperatura corporea registrata in una persona degente in ospedale al mattino e al pomeriggio per alcuni giorni consecutivi e porzione del diagramma che si otterrebbe con più rilevamenti sistematici.



L'andamento della linea ottenuta congiungendo i punti corrispondenti ai successivi rilevamenti dà immediatamente un'idea complessiva di come è variata la temperatura, ma non è una rappresentazione fedele dell'andamento della temperatura dal 13 giugno al 19 giugno. Ad esempio la parte di grafico che va dal punto corrispondente alla mattina del 14 a quello corrispondente al pomeriggio del 16 è costantemente in salita, mentre nella realtà la temperatura potrebbe aver avuto delle oscillazioni. A fianco del diagramma ospedaliero è raffigurata parte di un diverso diagramma che si potrebbe ottenere se la temperatura fosse rilevata ogni giorno sistematicamente alle 6, alle 12, alle 18 e alle 24.

Il fenomeno "temperatura corporea" non è rappresentato esattamente anche per altri aspetti.

Innanzitutto i pallini sono tracciati al centro delle due colonne che rappresentano la prima metà e la seconda metà di un giorno anche se le temperature non vengono rilevate alle 6 del mattino e alle 6 del pomeriggio.

Poi la temperatura registrata col termometro non è il valore preciso della temperatura. Infatti leggendo il termometro si cerca di individuare la tacca della scala numerica che è più vicina all'estremità della colonnina di mercurio; il numero ottenuto ci dà una misura della temperatura fino ai decimi di grado, non oltre. Ad esempio se la colonnina arriva fra la tacca 37.2 e la tacca 37.3 e ci sembra che sia più vicina alla prima tacca, diciamo che la temperatura è 37.2°, ma in realtà potrebbe avere un valore superiore a 37.2° ed essere ad esempio 37.236...°.

Per ottenere i centesimi di grado sarebbe necessaria un'ulteriore suddivisione della scala graduata, per ottenere i millesimi di grado ne occorrerebbe ancora un'altra, e così via.

Inoltre sul retro del termometro troviamo una scritta come quella riportata nella *figura 9*. Essa significa che impiegando un altro termometro dello stesso modello si sarebbe potuta ottenere la temperatura 37.1° o la temperatura 37.3°, cioè una variazione in più o in meno di 0.1° rispetto alla temperatura 37.2° che abbiamo letto.



Con questa scritta il fabbricante del termometro ci assicura che materiali e tecniche di fabbricazione impiegate (il procedimento con cui sono state incise le tacche sulla scala, il modo in cui sono state posizionate la colonnina di mercurio e la scala graduata, ...) garantiscono che la misura vera può differire dalla misura letta al più di 0.1°. A volte si usa la scrittura 37.2 ± 0.1 gradi per indicare una temperatura di cui si conosce la misura 37.2° letta con uno strumento che ha la

precisione di 1 decimo di grado.

Da quanto ora osservato segue che anche i *numeri*, quando sono impiegati per descrivere una grandezza, assai spesso non la descrivono esattamente, ma in maniera *approssimata*. In altre parole il numero che esprime la misura di una grandezza è un *modello* di questa. A seconda dello strumento di misura impiegato o delle informazioni che si hanno a disposizione si possono ottenere misure più o meno precise, cioè modelli che rappresentano più o meno fedelmente la grandezza.

Anche in questo caso non esiste "il modello migliore".

Ad esempio, per valutare lo stato di salute di una persona come informazione sulla sua temperatura corporea un dato come 38.4° è sufficiente, e è più "leggibile" di un dato come 38.391° , che sarebbe rilevabile con un termometro più sofisticato.

9 In uno stesso giorno (del settembre 1989) su tre quotidiani compaiono tre articoli diversi dedicati all'inizio dell'anno scolastico. In tutti e tre si vuole dare un'idea di quanto costi il mantenimento agli studi disponendo dell'informazione che nel 1988 una famiglia spendeva mediamente 1 535 481 lire in "istruzione". Nel primo giornale questa spesa viene indicata con «1 milione e 535 mila lire», nel secondo con «1.5 milioni», nel terzo con «un milione e mezzo di lire». Nessuno sceglie «1 535 481 lire». Che differenze ci sono tra questi quattro modi di indicare la spesa considerata? Quale dei quattro modi avresti scelto tu? Perché?

.....

.....

.....

.....

.....

Considerando le rappresentazioni cartografiche abbiamo incontrato un ulteriore tipo di modello di natura numerica. Abbiamo infatti ricordato che per rappresentare una posizione in una cartina o un punto in una generica superficie piana, fissato un sistema di riferimento, si utilizza una opportuna coppia di numeri, le coordinate del punto. Questa *coppia di coordinate* è il modello con cui rappresentiamo il *punto*.

A seconda della approssimazione con cui vogliamo rappresentare una posizione possiamo avere coordinate più o meno precise. Ad esempio possiamo dire che Firenze ha coordinate 11° E, 44° N o che ha coordinate $11^\circ 16'$ E, $43^\circ 45'$ N.

Sempre nell'ambito delle rappresentazioni della superficie terrestre, abbiamo impiegato un altro modello: abbiamo identificato la *Terra* con una *sfera*; in particolare abbiamo supposto che meridiani ed equatore fossero tutti circonferenze eguali. Questo modello è realizzato materialmente nei globi terrestri girevoli.

Anche questa modellizzazione, assai efficace, nasce da una semplificazione: vengono trascurati i rilievi, come se la superficie terrestre fosse tutta al livello del mare, e, soprattutto, non si tiene conto che la Terra è leggermente schiacciata ai Poli: il suo spessore all'altezza dell'equatore è di circa 12 760 km mentre tra i due Poli è di circa 12 715 km. In particolare mentre un grado di longitudine corrisponde a 111.1 km, un grado di latitudine lungo l'equatore corrisponde a 111.3 km.

I modelli che abbiamo considerato fin qui (raffigurazione sul piano di superfici non piane, diagrammi, numeri per rappresentare grandezze, coppie di numeri per rappresentare posizioni, sfera

approssimante la Terra) sono tutti **modelli matematici**, nel senso che sono rappresentazioni semplificate di fenomeni o aspetti della **realtà** realizzate impiegando oggetti matematici (figure, numeri, ...).

Naturalmente non esistono solo modelli matematici.

Ad esempio un *trenino elettrico* che sia il modello in scala ridotta di una locomotiva reale non è un modello matematico in quanto è realizzato impiegando tecniche e concetti non riconducibili solo alla matematica (ad esempio il funzionamento del motorino si basa su principi di fisica, la scelta e la lavorazione dei materiali fa riferimento a nozioni di chimica e di altre discipline, ...).

Oppure si pensi alla ricostruzione dei fattori che sono stati all'origine di un certo evento dell'antichità e alla *descrizione* di questo *evento* che vengono fatte da un *manuale di storia*: non siamo di fronte a una rappresentazione fedele di ciò che accaduto, ma a una rappresentazione semplificata, che cerca di cogliere gli aspetti e le cause (che l'autore ritiene) essenziali. Cioè siamo di fronte a un modello di quell'evento, che evidentemente non è matematico, e è anche molto "soggettivo": un altro storico può interpretare e collegare diversamente le varie informazioni sull'evento che si hanno a disposizione.

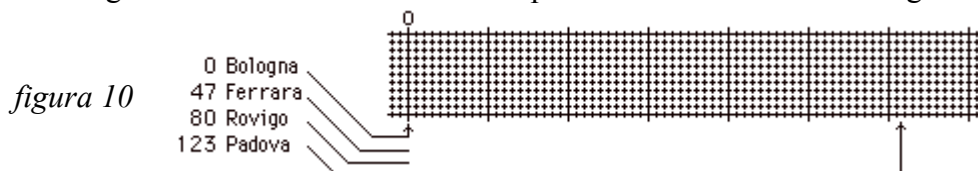
Le *discipline* (la matematica, la chimica, la linguistica, la geografia, ...), ma anche noi, nella vita quotidiana, facciamo un ampio uso di modelli, cioè di rappresentazioni semplificate o convenzionali, che sono utili per facilitare i ragionamenti, la comunicazione delle idee, Vi sono tuttavia alcune differenze fondamentali tra i modelli della matematica e i modelli impiegati in altre discipline e in altri campi. Su questi aspetti ci soffermeremo maggiormente nell'ultima scheda dell'unità didattica.

5. Esercizi

10 Nella *figura 10* sono rappresentate su una striscia di carta quadrettata, in una scala opportuna, le posizioni lungo la linea Bologna-Venezia delle stazioni di Bologna e di Padova.

La linea ferroviaria è rappresentata *rettificata*, cioè "raddrizzata" fino ad assumere forma rettilinea: vengono rappresentate le *distanze ferroviarie* che intercorrono tra Bologna e le altre stazioni, non le direzioni che man mano assume la strada ferrata.

- (a) Quanti chilometri rappresenta un quadretto grande? ...
Quanti uno piccolo? ...
- (b) Completa la figura indicando con due frecce le posizioni di Ferrara e di Rovigo.



11 Nella *figura 11* sono rappresentate le stesse stazioni della linea Bologna-Venezia considerate in fig. 10.

- (a) Con un righello o con una striscia di carta millimetrata misura la distanza nella figura tra Bologna e Padova e, tenendo conto della distanza ferroviaria reale, calcola la scala di riduzione della nostra rappresentazione.
scala 1 :

Ricorda che, ad esempio, *scala 1:15000*, scritto anche 1/15000 o "a due piani" nel modo riprodotto a destra, si legge *scala 1 a 15000* o *1 quindicimillesimo* o *1 diviso 15000* e indica che le distanze reali sono state divise per 15000, cioè moltiplicate per 1/15000, ossia che per

ottenere le distanze reali occorre moltiplicare per 15000 le distanze sulla cartina.

$$\frac{1}{15000}$$

(b) Descrivi, in poche parole, come hai proceduto per calcolare la scala di riduzione.

.....

.....

.....

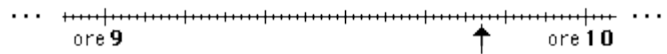
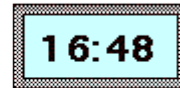
.....

figura 11



12 Considera la cartina in → figura 2. Individua i capoluoghi di regione aventi approssimativamente le seguenti coordinate geografiche: $14^\circ \text{ E}, 41^\circ \text{ N}$; $8^\circ \text{ E}, 45^\circ \text{ N}$; $11^\circ \text{ E}, 46^\circ \text{ N}$; $16^\circ \text{ E}, 38^\circ \text{ N}$. Determina (approssimativamente) le coordinate geografiche dei seguenti capoluoghi di regione: Bari, Aosta, Trieste.

13 A fianco sono rappresentate tre ore mediante tre diversi dispositivi. Rappresenta ciascuna ora anche mediante dispositivi degli altri due tipi.



14 Considera il seguente problema:

«Per registrare un programma televisivo il cui inizio e la cui fine sono previsti rispettivamente per le 21:40 e per le 23:25 basta una cassetta da 120 minuti o ne occorre una da 180?»

Giovanni sostiene che per risolvere il problema si deve calcolare $23:25 - 21:40$. Laura afferma che conviene calcolare $21:40 + 2:00$.

- Chi dei due ha ragione secondo te?
- Qual è la soluzione del problema? Perché?

15 Le due figure seguenti, a sinistra, riproducono lo stato di un orologio in due momenti successivi (10:42 e 13:04) di uno stesso giorno. La figura successiva visualizza come si può calcolare il tempo trascorso riferendosi alle posizioni delle lancette:

la lancetta corta è ruotata di "2 ore" e "rotti", la valutazione di quanto è ruotata la lancetta lunga ci permette di valutare i "rotti" (è ruotata di "22 minuti").

