NAPOLEON, ESCHER AND TESSELLATIONS

NAPOLÉON, ESCHER ET LES TESSELLATIONS

J.F. Rigby
University of Wales College of Cardiff
School of Mathematics
Senghennydd Road
CARDIFF CF2 4AG
Wales, U.K.

By mutual agreement, this article is also being published in *Mathematical Magazine*.

Suite à une entente mutuelle, cet article est également publié dans la revue *Mathematical Magazine*.

French translation:
Traduction française :
Jean-Luc Raymond

ABSTRACT

Napoleon and Escher both have theorems about triangles named after them. It is doubtful whether Napoleon knew enough geometry to prove Napoleon's theorem [3, p.63], and Escher apparently never found a proof for the last part of Escher's theorem. The first part of Escher's theorem is a form of converse of Napoleon's theorem, and both theorems can be proved using tessellations, a method that would surely have appealed to Escher with his love of filling the plane with congruent shapes.

Given any triangle, we can tessellate the plane using congruent copies of this triangle and equilateral triangles of three sizes, as shown in **Figure 1**. The centres of the small equilateral triangles in this figure clearly form the vertices of an equilateral triangular lattice, shown in **Figure 2** by unbroken lines. The centres of the remaining equilateral triangles lie at the centres of the triangles of the lattice; hence we see from the **Figure 2** that the centres of *all* the equilateral triangles form the vertices of a smaller equilateral triangular lattice, shown by broken lines. **Figure 3a** forms just part of the

RÉSUMÉ

Napoléon et Escher ont tous deux, au sujet des triangles, des théorèmes sur les triangles portant leur nom. Il est permis de douter que Napoléon connaissait assez la géométrie pour démontrer le théorème de Napoléon [3, p.63], et Escher n'a apparemment jamais pu démontrer la dernière partie du théorème d'Escher. La première partie du théorème d'Escher est une forme de réciproque du théorème de Napoléon et les deux théorèmes peuvent être démontrés en utilisant les tessellations, une méthode qui aurait sûrement plu à Escher étant donné son amour pour le pavage du plan avec des formes congruentes.

Étant donné un triangle quelconque, on peut remplir le plan par des copies congruentes de ce triangle et des triangles équilatéraux de trois tailles, comme illustré à la **figure 1**. Les centres des petits triangles équilatéraux de cette figure constituent clairement les sommets d'un treillis triangulaire équilatéral, illustré à la **figure 2** par des traits continus. Les centres des autres triangles équilatéraux se situent au centre des triangles du treillis ; on voit donc à la **figure 2**

FIGURE 1

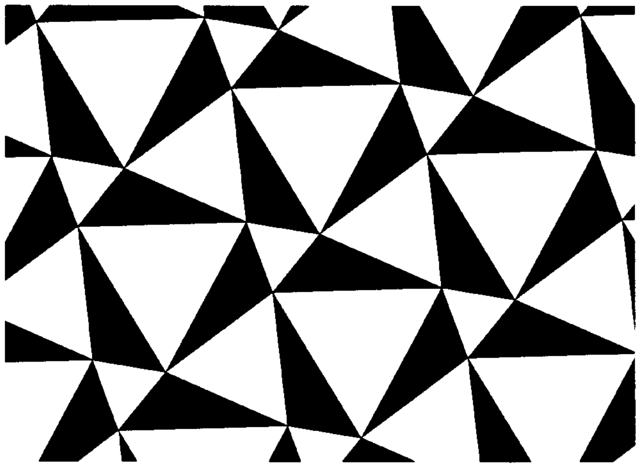


FIGURE 2

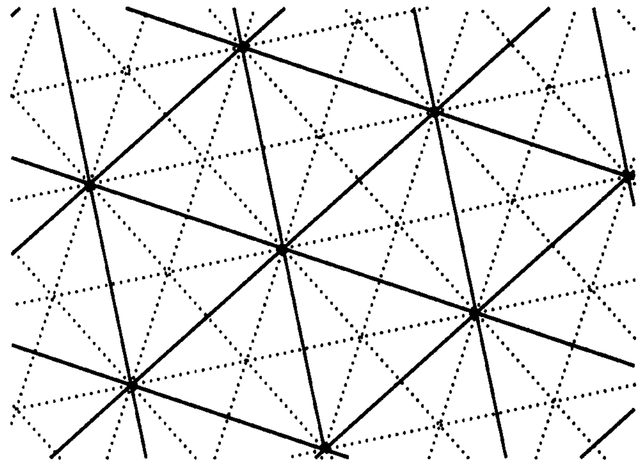
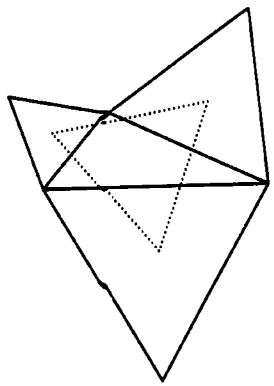
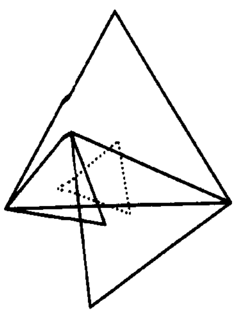


FIGURE 3

3a



3b



tessellation in **Figure 1**; hence the centres of the three equilateral triangles in **Figure 3a** are the vertices of an equilateral triangle. This result is known as *Napoleon's theorem*; the proof just given can be found in [9], together with a figure showing that the same proof will work when the equilateral triangles are erected internally as in **Figure 3b** if we are prepared to extend our idea of a tessellation.

One of the notebooks of the Dutch graphic artist M.C. Escher contains some interesting results about a special type of hexagon. Although these results were known previously, we shall group them together under the title of "Escher's theorem"; the theorem may be stated as follows.

(i) *Let ABC be an equilateral triangle and E any point (**Figure 4**). Let F be the point such that* $AF = AE$ *and* $\measuredangle FAE = 120°$. *Let D be the point such that* $BD = BF$ *and* $\measuredangle DBF = 120°$. *Then* $CE = CD$ *and* $\measuredangle ECD = 120°$.

(ii) *Congruent copies of the hexagon AFBDCE can be used to tessellate the plane.*

(iii) *In **Figure 4** the lines AD, BE and CF are concurrent.*

que les centres de *tous* les triangles équilatéraux constituent les sommets d'un plus petit treillis triangulaire équilatéral, illustré par des traits brisés. La **figure 3a** n'est qu'une partie de la tessellation de la **figure 1** ; ainsi, les centres des trois triangles équilatéraux de la **figure 3a** sont les sommets d'un triangle équilatéral. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Napoléon*; la démonstration qui en fut alors donnée peut être trouvée dans [9] ; on y trouve aussi une figure montrant que la même démonstration est applicable lorsque les triangles équilatéraux se prolongent à l'intérieur comme à la **figure 3b** si on est prêt à étendre le concept de tessellation.

L'un des cahiers de notes de l'artiste graveur hollandais M.C. Escher contient certains résultats intéressants à propos d'un type spécial d'hexagone. Même si ces résultats étaient connus précédemment, on les groupera sous le titre de « théorème d'Escher » ; le théorème peut être énoncé comme suit:

(i) *Soient ABC un triangle équilatéral et E un point quelconque (**figure 4**). Soit F le point tel que* $AF = AE$ *et* $\measuredangle FAE = 120°$. *Soit D le point tel que* $BD = BF$ *et* $\measuredangle DBF = 120°$. *Alors* $CE = CD$ *et* $\measuredangle ECD = 120°$.

FIGURE 4

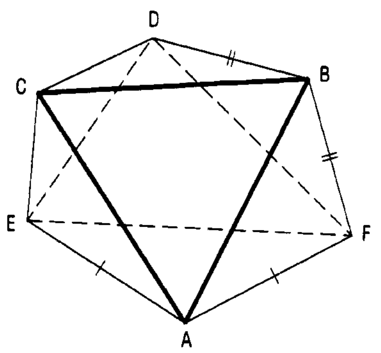
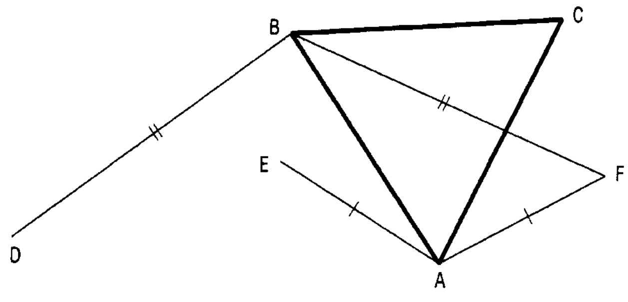


FIGURE 5



Escher's notebooks have been edited by Professor Doris Schattschneider [10]. She remarked in a letter to me that "it is very likely that Escher learned about the special tiling hexagon in a paper by F. Haag [5]; this paper and an earlier one [4] were on the list of references provided to him in 1937 by his half brother B.G. Escher. He studied [5] pretty carefully, copying many diagrams, including one showing a 6-fold "rosette" of the special hexagon. As far as I can see from the articles, Haag makes no mention of the diagonals of the hexagon. The facts are that in stating his Theorem, Escher underlined his statement about the diagonals and also had no reference and no proof—that makes me pretty sure it was his own discovery. Also he wrote to his son George to ask if he could prove the result."

To prove (i) we apply Napoleon's theorem to the triangle DEF. The point A is the centre of the equilateral triangle erected on EF, and B is the centre of the equilateral triangle erected on FD. The centres of all three equilateral triangles erected on the sides of DEF form an equilateral triangle by Napoleon's theorem; but ABC is equilateral, so C must be the centre of the equilateral triangle erected on DE. The result follows immediately.

(ii) Des copies congruentes de l'hexagone AFBDCE peuvent être utilisées pour construire un pavage du plan.

*(iii) Dans la **figure 4**, les droites AD, BE et CF sont concourantes.*

Les cahiers de notes d'Escher ont été édités par le professeur Doris Schattschneider [10]. Elle a noté dans une lettre qu'elle m'adressait qu'«il est très probable qu'Escher ait pris connaissance de ce pavage spécial d'hexagones dans un article de F. Haag [5]; cet article, de même qu'un autre plus ancien [4] apparaissaient sur la liste de références que lui fournissait son demi-frère B.G. Escher en 1937. Il a étudié [5] assez attentivement, copiant plusieurs diagrammes, y compris celui montrant une « rosace » sextuple de l'hexagone spécial. En autant que je puisse le voir des articles, Haag n'a pas fait mention des diagonales de l'hexagone. Le fait est qu'en énonçant son théorème, Escher souligna son énoncé concernant les diagonales et il n'avait ni référence ni démonstration. Cela m'assure presque totalement que c'était sa propre découverte. De plus, il a écrit à son fils George pour lui demander s'il pouvait démontrer le résultat.»

Pour montrer (i), on applique le théorème de Napoléon au triangle DEF. Le point A est le centre du triangle équilatéral construit sur EF, et B est le centre du triangle équilatéral construit sur FD. Les centres des trois triangles équilatéraux construits sur les côtés de DEF forment un triangle équilatéral selon le théorème de Napoléon; mais ABC est équilatéral, ainsi C doit être le centre du triangle équilatéral construit sur DE. Le résultat s'ensuit immédiatement.

Le lecteur astucieux aura remarqué qu'il existe deux triangles équilatéraux qui peuvent être construits sur EF et sur FD ; il y a aussi deux triangles équilatéraux qui ont AB comme côté. Notre démonstration n'est donc pas suffisamment soignée. Mais le théorème lui-même n'a pas été énoncé de façon assez précise ! La **figure 5** satisfait les conditions du théorème, et on a même mesuré les angles $\measuredangle$FAE et $\measuredangle$DBF dans la même direction ; toutefois la conclusion du théorème