I numeri

Le strutture numeriche e i loro usi

Scheda **1**

Usi dei numeri

1. Che cos'è un numero?
2. Numeri uguali
3. Le strutture numeriche
4. Basi di numerazione (approfondimenti)
5. Esercizi
➔ *Sintesi*

1. Che cos'è un numero?

Consideriamo la definizione che ne dà un diffusissimo vocabolario della lingua italiana:

(**Def. 1**) *ente matematico che caratterizza un insieme di cose o di persone*

1 Le bilie hanno la caratteristica di avere la forma di una sfera. Qual è l'ente matematico che caratterizza l'insieme delle bilie? E` un numero?

(Def.1) non è certo soddisfacente. Forse gli autori del vocabolario avrebbero voluto intendere:

(**Def. 2**) *ente matematico usato per indicare una quantità (di cose o di persone)*

2 Considera le frasi seguenti. Ti sembra che l'uso di numeri fatto in esse sia in ogni caso in accordo con la definizione tentata sopra? Per quali motivi?

(**1.1**) Sei alto 178 cm.
(**1.2**) Ho preso 6 di inglese.
(**1.3**) Ieri eravamo a 3 gradi, oggi è più freddo, siamo a -2 gradi.
(**1.4**) Ci sono prima io, lei ha il numero 27, io il 25.

E` sicuramente migliore la seguente definizione, tradotta da un noto vocabolario della lingua inglese:

(**Def. 3**) *un elemento del sistema di simboli usato per contare e per rappresentare misure*

Nei casi (1.1)-(1.3) i numeri vengono impiegati per rappresentare *misure,* anche se nel caso dei voti non si tratta di misure in senso stretto: non è chiaro che cosa si misuri (la bravura di un alunno o il suo comportamento durante una prova di verifica, che può essere condizionato da fattori emotivi, dagli argomenti specifici dei quesiti, …) e in che modo venga effettuata la misura (una interrogazione, una prova scritta, … possono essere valutate diversamente da insegnanti diversi o dallo stesso insegnante in giornate diverse).

Nel caso delle grandezze fisiche la misurazione è un procedimento per associare numeri a grandezze, ma non è detto che questi numeri rappresentino sempre delle quantità: mentre 0 cm può indicare un oggetto di altezza nulla e un oggetto di 20 kg pesa il doppio di uno di 10 kg, la temperatura di 0° non indica un'assenza di calore (si può infatti scendere sotto a 0°) e non ha senso dire che le ore 20 sono il doppio delle 10.

Nel caso (1.4) il numero viene usato per tener conto dell'*ordine di arrivo* degli utenti ad uno sportello di informazioni, in un ufficio o in un negozio usualmente molto affollati. Non è detto che misuri la quantità delle persone arrivate: due persone possono essere venute insieme (per chiedere la stessa informazione o fare lo stesso acquisto) e aver preso un solo biglietto; una persona può avere strappato per sbaglio due biglietti; in genere quando si arriva al biglietto numero 99 si riparte con un nuovo blocchetto di biglietti; …

(Def.3) è più precisa di (Def.2): non si parla di una generica indicazione di quantità di oggetti ma si parla di *conta* e di *misurazione*. Inoltre, descrivendo i numeri come le espressioni usate per contare e misurare, non si esclude che queste espressioni siano usate anche per altri scopi.

3 Considera le frasi seguenti. Anche in questi casi i numeri sono usati per misurare, per tener conto di un ordine di arrivo o per indicare una posizione in qualche altro tipo di elencazione?

(**1.5**) Versa i soldi nella Banca Carige, sul conto n° 38155/80.
(**1.6**) Il mio numero di codice fiscale è DPT NMR 50D57 D969V.
(**1.7**) Telefonami al numero 010 210407.
(**1.8**) Le abbiamo riservato la camera 507, al 5° piano.

In (1.5) è stato usato "/" per separare i due numeri 38155 e 80; 38155 è il numero del conto in senso stretto, 80 è un numero che specifica il tipo del conto. A volte si trova scritto equivalentemente 3815580. 38155/80 non è dunque un numero come quelli usati comunemente in matematica, ma, piuttosto, indica una coppia di numeri.

Nel caso (1.6) siamo di fronte a un "numero" ancora più strano. Vediamo che cosa rappresenta DPT NMR 50D57 D969V:

DePeTris aNnaMaRia, femmina (57>40), nata il 17 (57-40) / 4 (D è la 4ª lettera dell'alfabeto) / 50 nel comune di Genova (D969).

Il numero di codice fiscale del fratello Calogero è invece DPT CGR 53M07 D969Q (egli è nato il 7 agosto 1953; per i maschi il giorno di nascita viene indicato senza aggiungere 40).

4 Quali sono il sesso e la data di nascita di M.Rovati se il suo numero di codice fiscale inizia con RVTMRA60L60?

Nel caso (**1.5**) eravamo di fronte a una espressione (38155/80) che aveva lo scopo di identificare una particolare cosa (un conto corrente bancario). (**1.6**) non ha invece solo lo scopo di identificare una persona (come potrebbe essere il numero associato ad un alunno nel registro di classe), ma ha anche quello di rappresentare alcune informazioni su di essa. Infatti il codice fiscale è un codice che traduce in una sequenza di 16 simboli (lettere o cifre) tutta una serie di informazioni.

010 210407 in (**1.7**) rappresenta un punto terminale della rete telefonica di un certo distretto telefonico, ad esempio il tratto di linea a cui sono collegati gli apparecchi telefonici di un particolare appartamento di una data città. E` un numero che non ha alcun significato quantitativo (del resto non è letto come 10 milioni 210 mila 407). Alcune cifre possono invece indicare alcuni riferimenti geografici della zona dell'appartamento in cui arriva la linea telefonica.

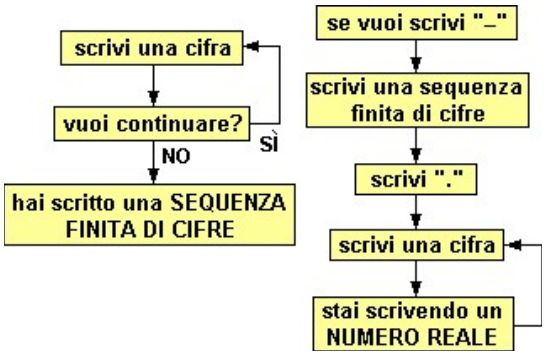
Nel caso (**1.8**) il numero 507 indica una particolare camera dell'albergo. Negli alberghi (e, in genere, nelle ditte e negli enti che hanno uffici disposti su più piani) la numerazione delle stanze ha questo significato: stanza 507 = 7ª stanza del 5° piano.

Infine, gli usi della parola *numero* fatti in (1.5) e in (1.6) sono sicuramente legittimi nel linguaggio comune. Tuttavia facendo matematica non ci sogneremmo mai di considerare DPT NMR 50D57 D969V un numero e se volessimo considerare 38155/80 un numero interpreteremmo il simbolo "/" come segno della divisione, cioè intenderemmo 38155/80 come termine numerico che vale 476.9375. In altre parole DPT NMR 50D57 D969V e 38155/80 sono espressioni che non fanno parte del sistema di simboli impiegato per contare e rappresentare misure.

La definizione (Def.3) è dunque un po' restrittiva rispetto al linguaggio comune. Rispetto alla matematica è invece un po' vaga. Infatti non spiega al lettore del vocabolario come è fatto questo sistema di simboli. Proviamo a precisare noi questa descrizione.

E` un ***numero intero*** ogni espressione costituita da una sequenza finita di cifre eventualmente preceduta dal segno "–". Cioè è un'espressione ottenuta *arrestando* in un qualsiasi momento il procedimento (1.9), avendo eseguito almeno una volta il passo (2)

(1.9)
(1) se vuoi scrivi "–"
(2) scrivi una cifra
(3) vai a (2)



Più in generale è un ***numero*** ogni espressione costituita da un numero intero eventualmente seguito dal segno "." e da una sequenza di cifre finita (*numero limitato*) o senza fine (*numero illimitato*). Esempi:

12 12.0512 12.34343434… −7 −7.17385261402… −0.01

(1.10)
(1) scrivi un numero intero
(2) scrivi "."
(3) scrivi una cifra
(4) vai a (3)

In altre parole è un numero ogni espressione che può essere generata con il procedimento (1.10) a lato, sia che lo si arresti, avendo eseguito almeno il passo (1), sia che non lo si arresti. Per precisare che si sta trattando di un numero generico e non di un numero intero o limitato si usa l'espressione ***numero reale***. Su questa parola torneremo tra poco.

5 Scrivi un po' di cifre del numero reale generabile con il procedimento *meccanico* descritto a lato, cioè in cui è stato determinato il modo in cui devono essere prese le cifre:

(1) scrivi "27."
(2) scrivi "04"
(3) vai a (2)

6 Descrivi un procedimento meccanico per generare il numero reale 2.666… (e così via con altri 6).

7 Descrivi un procedimento meccanico per gererare il numero che è il risultato di 1/22.

I *numeri interi* traggono il loro nome dal fatto che vengono usualmente impiegati per indicare quantità di oggetti non frazionabili. Ad esempio una popolazione può essere di 152 518 abitanti, non di 152518.5 abitanti, cioè di 152518 abitanti e mezzo.

Naturalmente usando unità di misura maggiori dell'*abitante* si può ricorrere anche a numeri non interi; ad esempio la popolazione precedente potrebbe essere espressa come 152.518 *migliaia di abitanti*. Se poi, ad esempio, si considera la popolazione media di un comune di una certa provincia, si può ottenere un numero non intero: se gli abitanti della provincia sono 945 387 e i comuni sono 612, la popolazione media di un comune è di 945387/612 = 1544.75 abitanti.

Il termine ***numeri reali*** è invece un modo diverso in cui vengono indicati gli oggetti matematici di solito chiamati semplicemente *numeri.* Dietro all'uso di questa denominazione più estesa vi è il fatto che esistono degli oggetti matematici più generali che vengono chiamati *numeri complessi,* di cui farai la conoscenza più avanti nel corso degli studi. Quando si vogliono evitare confusioni si aggiunge la specificazione "reali". Noi, che per il momento non avremo a che fare con i numeri complessi, in genere ometteremo l'aggiunta dell'aggettivo "reali".

Comunque possiamo osservare che è stato scelto l'aggettivo "reali" perché questi numeri sono quelli impiegati per rappresentare misure fisiche ed economiche.

2. Numeri uguali

Ecco alcuni altri esempi di uso dei numeri.

(**2.1**) I genovesi posero questa lapide nell'anno MCMVI a ricordo …
(**2.2**) Sono già le 7:30.
(**2.3**) Come risultato di 10 [x^y] 18 [=] si ottiene 1E18.

[8] Questi esempi corrispondono alla definizione di numero a cui siamo arrivati nel paragrafo precedente (espressione opportunamente costruita con cifre e un eventuale "−" e un eventuale ".")? III, 7:30, 1E18 sono numeri?

Nel caso della notazione esponenziale impiegata dai mezzi di calcolo - es. (2.3) - siamo di fronte ad espressioni impiegate per rappresentare in forma abbreviata un numero usualmente scritto usando solo cifre. Anche nel caso (2.1) siamo semplicemente di fronte a una diversa scrittura del numero 1906.

In (2.2) si è impiegato il simbolo ":" per delimitare la parte che indica la quantità di ore dalla parte che indica la quantità di minuti, cioè riferita a un'unità di misura (60 volte) più piccola.

Analogamente a volte per indicare l'estensione di terreni (ad esempio sui certificati catastali) si usano scritture come 6;05;17 *ha* (ettari) per intendere un'area di 6 *ha*, 5 *a* (are) e 17 *ca* (centiare): qui il ";" delimita la parte che indica la quantità in una unità di misura da quella che la indica in una unità di misura (100 volte) più piccola.

[9] Esprimi la durata di 7 h 30 min e l'area 36;05;17 *ha* con l'usuale scrittura decimale (solo cifre e punto).

7 h 30 min = … h 36;05;17 ha = … ha

(2.1)-(2.3) sono tutti esempi di scritture riconducibili meccanicamente, attraverso una decodifica, a espressioni che concordano con la definizione che abbiamo dato. Diremo, quindi, che, ad esempio, CC, 200 e 2E2 sono tre modi diversi per indicare lo stesso numero. Assumeremo, comunque, 200 come notazione *standard* di esso.

Analogamente a volte si scrive 01, 02, … o 001, 002, … invece di 1, 2, … . A volte si trova scritto pure .37 invece di 0.37. Anche in questi casi si tratta di diverse rappresentazioni di uno stesso numero. Così a volte lo stesso numero viene indicato con 7.3, 7.30, 7.300, … . Siamo di fronte a espressioni che pur essendo *diverse come sequenze di simboli* sono ***uguali come numeri***.

In altre parole per caratterizzare il concetto di numero non possiamo limitarci a dire "sequenza di cifre …" ma dobbiamo anche precisare quando due di queste sequenze sono da considerare *uguali come numeri.*

[10] Due quadrati con lato di 15 cm tracciati su una lavagna con gessi di colore diverso, ad esempio verde e bianco, sono due figure indubbiamente differenti: una è verde e l'altra è bianca. Possiamo dire che sono due *figure geometriche* uguali? Trovi qualche analogia tra questa situazione e, ad esempio, il caso dell'eguaglianza di 0.750 e .75.

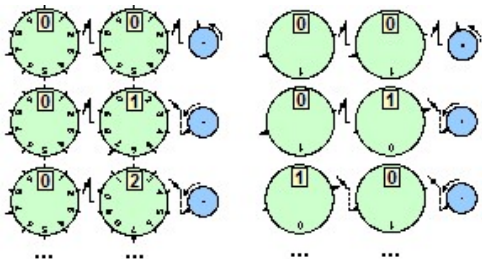
I numeri possono essere rappresentati in molti altri modi.

Ad esempio in codice Morse e in codice BCD, sostituendo una ad una le cifre di un numero scritto in notazione decimale con altri simboli (nel primo caso con una particolare sequenza di punti e di linee, nel secondo caso con un gruppo di 4 bit). Ovvero *usando i procedimenti (1.9) e (1.10) con sistemi di cifre diversi dall'usuale:*

- se uso come cifre 0 e 1 posso ottenere ad esempio: 0, 1000.01, −1.1010, 1111, …
- se uso come cifre 0, 1 e 2 ottengo ad esempio: 2, −212, 0, 10.201, …
- se uso come cifre 0, 1, 2, …, 9, A, B, C, D, E e F ottengo ad esempio: 1A.B, F.A, 0, −1.0B, …

Il problema è precisare quando due numeri scritti usando diversi sistemi di cifre sono da considerare uguali. La questione è semplice per quanto riguarda i numeri interi.

I numeri interi positivi vengono impiegati come modello matematico per contare: ogni volta che si passa da un oggetto a un altro (nel caso si stia contando una quantità di oggetti) o da un evento al successivo (nel caso si stia scandendo una successione di eventi: scorrere dei giorni, ordine di arrivo in una gara, movimenti in un passo di danza, …), si scatta da un numero intero al numero intero successivo.



I numeri si susseguono come nei contatori. Nella figura a lato (clicca per ingrandirla) è ricordato il funzionamento di un contagiri decimale (cifre: 0,1, …, 9) e di un contagiri binario (cifre: 0,1). Clicca **qui** per approfondimenti ed una animazione.

Per passare da una rappresentazione con il sistema a ***c*** cifre alla rappresentazione decimale si fa una somma di potenze di base ***c***. Ad esempio la scrittura in forma binaria 110 corrisponde a $1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0 = 1\cdot 4+1\cdot 2+0\cdot 1 = 6$. La scittura in base 60 del tempo (arrotondato ai secondi) 13:05 corrisponde a $13\cdot 60^1+5\cdot 60^0 = 13\cdot 60+5\cdot 1 = 785$ (secondi).

Per questi motivi la rappresentazione con il sistema a ***c*** cifre viene chiamata ***rappresentazione in base c.*** Per indicare le basi di rappresentazione dei numeri precedenti si usa indicare la base di rappresentazione come "pedice" e per le basi di numerazione superiori a 10 in genere si usano A, B, C, … per indicare le cifre "dieci", "undici", "dodici", …. Nei due casi precedenti (110 in base 2 e 13:05 in base 60) si usano scritture come le seguenti: $(110)_2$ e $(D5)_{60}$.

3. Le strutture numeriche

Abbiamo visto che a volte i numeri vengono usati semplicemente come stringhe, cioè come sequenze di caratteri, per identificare oggetti (ad esempio un apparecchio telefonico). In matematica invece i numeri non sono solamente delle sequenze di caratteri. Anzi, abbiamo visto che a un numero non è associata un'unica rappresentazione simbolica: esistono rappresentazioni simboliche diverse che vengono considerate uguali come numeri. Per adesso abbiamo approfondito questo aspetto relativamente ai numeri interi, successivamente lo affronteremo più in generale per tutti i numeri reali.

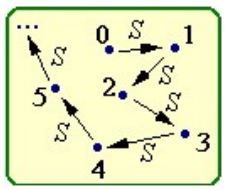
11 Il riquadro a lato raffigura un impiego di **R** (o di un altro qualunque programma di tipo matematico) per calcolare in corrispondenza di alcuni valori di input i valori di output della funzione x → x. In tutti i casi considerati si è ottenuto sempre "70". Spiega questo comportamento del programma.

```
F <- function(x) x
F(70); F(070.00); F(7e1)
```

La matematica si interessa degli usi dei numeri non come semplici "nomi" ma come elementi impiegati per costruire modelli matematici (percentuali, medie, equazioni, funzioni, grafici, …) che consentano di rappresentare e studiare le relazioni che intercorrono tra grandezze e fenomeni di vario genere.

A differenza del caso dei numeri telefonici (in cui non ha alcun senso stabilire se un numero telefonico precede o segue un altro o, ad esempio, calcolare la somma di due numeri telefonici), per mettere a punto un modello matematico non ci basta sapere come devono essere scritti i numeri, ma dobbiamo anche definire dei modi opportuni per confrontare e operare sui numeri. Cioè non possiamo considerare i numeri come una semplice collezione di oggetti, ma abbiamo bisogno di organizzarli, di dare ad essi una "struttura"

Ad esempio abbiamo visto che i numeri interi positivi possono essere impiegati per *contare*: al succedersi di certi eventi o certe azioni *passiamo man mano da un numero al numero successivo*. Non ci basta conoscere che cosa sono i numeri interi positivi, ma dobbiamo anche sapere il modo in cui, a partire da 1, si possono generare uno dopo l'altro tutti gli altri numeri interi positivi. Se partiamo da 0, invece dei numeri interi positivi consideriamo i numeri non negativi (numeri positivi più 0), che vengono più in breve chiamati ***numeri naturali***.



In altre parole dobbiamo conoscere la funzione *n* → *successore* di *n* che dato un numero mi dice come passare al numero successivo, cioè al suo ***successore***.

Indicata con S la funzione-successore e con S(*n*) il successore di *n*, si ha: S(0)=1, S(1)=2, S(2)=3, … . Volendo si può estendere la funzione ai numeri negativi; ad esempio S(−2)=−1, S(−1)=0: salendo in ascensore, al piano −2 (2 piani sotto-terra) segue il piano −1, al piano −1 segue il piano 0 (piano-terra).

Esempio 1. Supponiamo di voler stabilire in quale tra due strade A e B passano più automobili tra le 8 e le 9 del mattino di un certo giorno. Per fare questo ci basta considerare i numeri interi positivi e la funzione-successore S. Due persone si piazzano alle ore 8 presso le due strade, partono dal numero 0 e ad ogni passaggio di macchina fanno corrispondere una applicazione di S, cioè si comportano seguendo questo schema:

(**3.1**)
(1) prendi come n il numero 0;
(2) se è passata una nuova auto calcola S(n) e prendilo come nuovo n
(3) vai a (2)

Alle 9 le due persone si fermano e, confrontando i due valori nA e nB a cui sono arrivate, possono stabilire in quale delle due strade sono passate più automobili.

In questa situazione il *modello matematico* impiegato è dunque la ***struttura numerica*** costituita dall'insieme dei numeri naturali, il cui numero 0 viene assunto come ***elemento iniziale***, e dalla ***funzione-successore*** S. Non ci serve considerare altre funzioni, ad esempio la somma o il prodotto.

Esempio 2. Consideriamo la stessa situazione dell'esempio 1. Vogliamo però calcolare anche quante auto sono passate complessivamente per le strade A e B.

In questo caso dobbiamo arricchire la precedente struttura numerica considerando anche la ***funzione-somma***: $m,n \to m+n$.

Esempio 3. Esaminiamo invece la situazione (1.4) del quesito 2, e supponiamo che vengano impiegati blocchetti di biglietti numerati da 1 a 99: ogni persona in arrivo stacca il biglietto superiore del blocchetto in uso; esauriti i biglietti, viene messo in uso un nuovo blocchetto, identico al precedente.

Qui si sta impiegando una struttura numerica differente: è costituita dai numeri interi compresi tra 1 e 99 e da una funzione-successore differente da S, chiamiamola S':

$$S'(1)=2,\quad S'(2)=3,\quad \ldots\ S'(98)=99,\quad S'(99)=1.$$

Sulla base del solo modello matematico non è possibile stabilire tra il possessore del biglietto 93 e il possessore del biglietto 47 chi è arrivato prima. Infatti il 93 potrebbe essere stato staccato da un blocchetto precedente. Bisognerà far ricorso anche ad altre considerazioni.

12 Sei in coda per entrare in un ufficio del catasto assieme ad un'altra cinquantina di persone. Tu hai il numero 47 e vedi un'altra persona che ha il numero 93. Come potresti stabilire chi dei due è arrivato prima?

Nelle successive schede di questa unità didattica approfondiremo lo studio delle strutture numeriche.

4. Basi di numerazione (approfondimenti)

La tabella a lato illustra la scrittura dei numeri in diverse basi. Le cifre vengono ordinate alfabeticamente: 0 è la cifra iniziale, a cui seguono nell'ordine 1, 2, 3, …, 9, A, B, … . Dopo il numero 0 vengono generate in ordine alfabetico le parole non inizianti per 0 composte da un solo carattere, poi quelle composte da due caratteri, poi quelle composte da tre caratteri, e così via.

13 Provate a completare la *tabella (4.1)* e cercate di individuare come si fa in generale a trovare la rappresentazione decimale del numero 100…0 (n comparse della cifra 0) scritto impiegando un sistema di c cifre.

(**4.1**)

10 cifre	2 cifre	3 cifre	8 cifre	16 cifre
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	***10***	2	2	2
3	11	***10***	3	3
4	***100***	11	4	4
5	101	12	5	5
6	110	20	6	6
7	111	21	7	7
8	***1000***	22	***10***	8
9	1001	***100***	11	9
10	1010	101	12	A
11	1011	102	13	B
12	1100	110	14	C
13	1101	111	15	D
14	1110	112	16	E
15	1111	120	17	F
16	***10000***	121	20	***10***
17				
…				
27				
…				
32				

In un contagiri che usa un sistema di *10 cifre*:
− la ruota iniziale (a destra) - ruota di *posto 0* - scatta ad ogni giro,
− la ruota che segue - ruota di *posto 1* - scatta ogni *10 scatti* della ruota iniziale,
− la ruota che segue - ruota di *posto 2* - scatta ogni 10 scatti della precedente, cioè ogni $10\cdot 10=10^2$ *scatti* della ruota iniziale,
− la ruota che segue - ruota di *posto 3* - scatta ogni 10 scatti della precedente, cioè ogni $10\cdot 10\cdot 10=10^3$ *scatti* della ruota iniziale,
...

In un contagiri che usa un sistema di *8 cifre*:
− la ruota iniziale (a destra) - ruota di *posto 0* - scatta ad ogni giro,
− la ruota di *posto 1* scatta ogni *8 scatti* della ruota iniziale,
− la ruota di *posto 2* scatta ogni $8 \cdot 8 = 8^2$ *scatti* della ruota iniziale,
− la ruota di *posto 3* scatta ogni $8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3$ *scatti* della ruota iniziale,
...

Quindi il numero *562* scritto usando il sistema di cifre 0, 1, 2, …, 7 viene generato a partire da 0 con:
− 5 volte 8·8 incrementi unitari (scatti della ruota iniziale) in modo da far scattare 5 volte la ruota di posto 2 e arrivare a *500,*
− 6 volte 8 incrementi unitari in modo da far scattare 6 volte ruota di posto 1 e arrivare a *560,*
− 2 incrementi unitari, cioè 2 scatti ruota di *posto 0,* con cui infine arriviamo a *562.*

In definitiva *562* scritto usando il sistema di 8 cifre 0, 1, 2, …, 7 corrisponde nell'usuale rappresentazione a $8^2 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 2 = 64 \cdot \mathbf{5} + 8 \cdot \mathbf{6} + \mathbf{2} = 370$.

14 Trova la rappresentazione decimale di 1120 e di 1012 nei casi in cui si siano impiegati sistemi a 3, 8 e 16 cifre.

	0, 1, 2 → 0, 1, …, 9	0, 1, …, 7 → 0, 1, …, 9	0, 1, …, F → 0, 1, …, 9
1120			
1012			

Ricordiamo che la rappresentazione binaria viene chiamata anche rappresentazione in base due e che le altre rappresentazioni impiegate nella tabella (4.1) vengono chiamate in base tre, in base otto, in base sedici. La rappresentazione standard viene chiamata in base dieci. Quando scriviamo un numero in genere sottintendiamo che sia scritto in base dieci, cioè nel sistema in cui 10 rappresenta "dieci". Ricordiamo che quando si utilizzano altre basi queste vengono spesso specificate con una notazione come la seguente: $(3045)_8$ indica il numero che in base 8 è rappresentato da 3045.

Vediamo ad esempio come si può trovare la rappresentazione in base 5 di 67.

	3	2	1	0	posto della cifra
• Devo mettere assieme 67 usando potenze di 5 grandi il più possibile	?	?	?	?	
	125	25	5	1	potenza di 5
• 25 ≤ 67 < 125; quindi parto dalla cifra di posto 2	0	?	?	?	
• Quante volte posso prendere 25? 2, poiché 25·2 = 50 ≤ 67 < 25·3	0	2	?	?	
• Devo ancora formare 17. Quante volte prendo 5? 3 poiché 5·3 ≤ 17 < 5·4	0	2	3	?	
• Devo ancora mettere assieme 2. Quante volte posso prendere 1? 2	0	2	3	2	

Quindi $67 = (232)_5$.

15 Completa le seguenti uguaglianze:

$(2001)_3 = \ \dots \ = (\dots)_{16}$ $\qquad$ $(1111)_2 = \ \dots \ = (\dots)_4 = (\dots)_8 = (\dots)_{16}$

Quanto detto per i numeri interi positivi si può estendere a tutti i numeri interi: −8 può essere scritto $(-1000)_2$ o $(-10)_8$ o $(-22)_3$ ...

5. Esercizi

e1 Con i numeri impiegati per indicare le stanze degli alberghi non ha in genere senso fare operazioni aritmetiche. Ad es. se nell'albergo sono occupate tutte le stanze fino alla stanza 410 e tutte le stanze successive alla 507 non posso dire che le stanze rimanenti sono 507-410=97. Perché? Posso tuttavia fare dei confronti e, ad es., stabilire in base ai loro numeri quale tra due stanze è collocata più in alto. Come?

e2 Redigi un programma in JS (o in un altro linguaggio di programmazione) che traduca il procedimento del quesito 5.

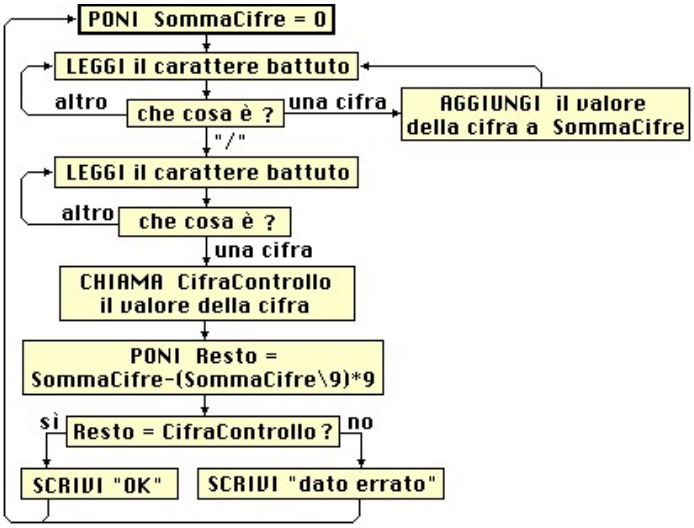
e3 Scrivi una ventina di cifre di ciascuno dei numeri descritti dai seguenti procedimenti.

(1) scrivi "–45.34"	(1) scrivi "13."	(1) scrivi "0.03"
(2) scrivi "0"	(2) scrivi "568"	(2) poni n=1
(3) vai a (2)	(3) vai a (2)	(3) scrivi n volte "2"
		(4) scrivi "47"
		(5) poni n=n·2 e vai a (3)

e4 Descrivi con un procedimento simile a quelli dell'esercizio precedente il risultato dei seguenti calcoli:

2/13 13/11 16.8/105 5/48 41/3.7

e5 Nella ditta BatDat il controllo dei dati non viene effettuato con calcoli manuali, ma usando un programma al calcolatore che procede secondo il diagramma di flusso a lato (la casella col bordo spesso è quella di avvio). Qui sotto è riportato un esempio d'uso del programma. Sai spiegare il procedimento di calcolo impiegato dal programma? (ricorda che "\" rappresenta la divisione intera)



?4?5?8?9?6?4?/?6 dato errato
?4?5?8?9?6?6?4?/?6 ok
?4?5?8?0?6?6?4?/?6 ok

e6 Siano f: $x \rightarrow 2x^3+x^2+2x+1$, g: $x \rightarrow x^3+2x+2$. Completa le seguenti eguaglianze (esprimendo i numeri mancanti in base dieci).

f(10) =	f(2) =	f(3) =	f(4) =
g(10) =	g(2) =	g(3) =	g(4) =
$(2121)_{10}$ =	$(2121)_2$ =	$(2121)_3$ =	$(2121)_4$ =
$(1022)_{10}$ =	$(1022)_2$ =	$(1022)_3$ =	$(1022)_4$ =

e7 Usa **R** (o un altro qualunque programma di tipo matematico) per calcolare in corrispondenza di opportuni valori di input i valori di output di opportune funzioni, in modo da controllare gli esiti dell'esercizio precedente. Spiega come hai proceduto.

e8 Per "mettere a segno" un particolare orologio digitale, dopo aver reso lampeggianti con opportune pressioni di uno dei pulsanti le cifre da modificare (quelle delle ore o quelle dei minuti), occorre premere ripetutamente l'altro pulsante, fino a che non si arriva ai valori "giusti". Indichiamo con S_1 la funzione successore per le ore (quella che ad ogni "ora" associa l'ora successiva dopo la pressione del pulsante) e con S_2 la funzione successore per i minuti.

1) Descrivi gli insiemi di numeri naturali A_1 e A_2 che costituiscono il dominio di S_1 e di S_2.

2) Completa la seguente tabella indicando quanti e quali sono gli elementi del tipo specificato (S è la ➡ funzione successore per i numeri naturali).

	Insieme dei numeri naturali dotato di S	*A_1 dotato di S_1*	*A_2 dotato di S_2*
elementi da cui applicando ripetutamente il successore si ottengono tutti gli altri elementi			
elementi che non possono essere output della funzione successore			

e9 Abbiamo visto quali informazioni vengono codificate dai primi 15 caratteri dei numeri di codice fiscale (i primi 6 caratteri di DPTNMR57D50D969V codificano cognome e nome, i successivi 5 codificano data di nascita e sesso, i successivi 4, cioè D969, codificano la località di nascita). La lettera finale (V nel nostro esempio) non

rappresenta informazioni, ma è un *carattere di controllo di correttezza* del numero di codice fiscale. Per capirne il significato pensiamo a una situazione di questo genere:

In un ufficio della ditta BatDat occorre battere su calcolatore una grande quantità di dati presenti in pratiche che provengono da altri uffici. Per ridurre la probabilità che vengano commessi errori di scrittura, la direzione dell'azienda decide che in tutte le pratiche i dati siano scritti aggiungendo sulla destra, preceduta da "/", una cifra che rappresenti la somma delle cifre calcolata come nella "prova del 9" (dalla somma delle cifre si sottrae ripetutamente 9 fino ad ottenere un numero a 1 cifra diverso da 9). Ad es. il dato 3 milioni e 457 mila 14 viene scritto 3457014/6 in quanto 3+4+5+7+0+1+4 → 3+9+7+1+4 → 3+7+1+4 → 10+5 → 1+5 → 6. Se per un errore di battitura o per un precedente errore di trascrizione il dato viene introdotto sul calcolatore come 347014/6, il calcolatore trova 3+4+7+0+1+4 → 1 e, poiché 1≠6, segnala la presenza di un errore. La cifra aggiunta sulla destra del numero funge da controllo.

Analogamente il carattere finale dei numeri di codice fiscale viene determinato in funzione dei caratteri precedenti. Ovviamente l'esattezza del carattere di controllo non garantisce l'esattezza del numero di codice: i caratteri di controllo sono tanti quante le lettere dell'alfabeto mentre i numeri di codice fiscale sono ben di più!

(*a*) Usando il metodo della ditta BatDat calcola la cifra di controllo di 187236, di 73641, di 12345678, di 2345678.

(*b*) Commettendo un solo errore di battitura si può introdurre invece di 3457014 un numero che abbia la stessa cifra di controllo? e nel caso di 3457214? e commettendo due errori di battitura?

e10 *(approfondimenti)* Una azienda che produce elettrodomestici identifica ogni prodotto che esce dalla fabbrica con un numero di codice composto dalle 2 cifre finali dell'anno di produzione e 3 caratteri che indicano il numero progressivo di produzione usando il sistema di 36 cifre 0, 1, …, 9, A, …, Y, Z (ad es. 09001 e 09002 identificano i primi due elettrodomestici prodotti nel 2009). Quanti elettrodomestici ha prodotto nel 2008 se l'ultimo pezzo prodotto in tale anno ha numero di codice 08B2X?

e11 *(approfondimenti)* Con `b <- 5; 2*b^2+3*b^1+2*b^0` in **R** trovo l'espressione decimale di $(232)_5$. Come troveresti in modo analogo la rappresentazione decimale di $(232)_{16}$, $(2233)_4$, $(1012)_8$ e $(BD2)_{16}$?

e12 *(approfondimenti)* Come definiresti una funzione-somma per il caso che segue, in modo che, se indichiamo con $m(+)n$ il risultato della sua applicazione a m e a n (m e n numeri interi tra 1 e 99)?

$m(+)1$ sia il numero della persona arrivata subito dopo la persona con il biglietto m,
$m(+)2$ sia il numero della persona 2 posti dopo la persona con il biglietto m
...

Prima completa gli esempi seguenti e poi tenta di dare una definizione generale.

90 (+) 9 = 90 (+) 10 = 33 (+) 50 = 33 (+) 80 =

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

numero intero (§1), *numero* (§1), *rappresentazione in base ...* (§2), *numeri naturali* (§3), *funzione successore* (§3).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").