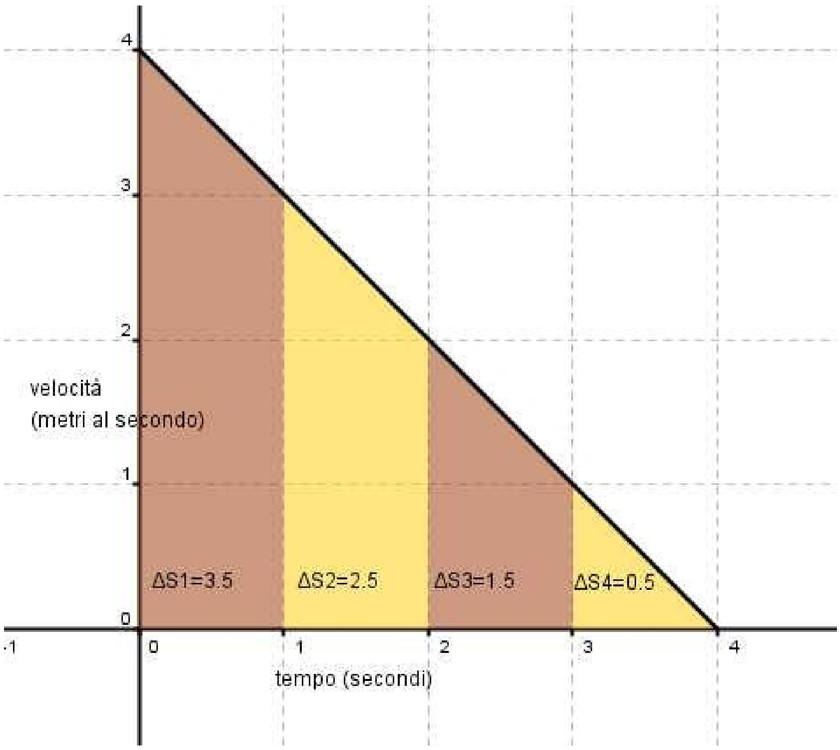
Area e pendenza
Il legame tra i grafici tempo – velocità e tempo – posizione

Abbiamo visto che la pendenza istantanea del grafico tempo – posizione fornisce il valore istantaneo della velocità. Il grafico tempo – posizione, insomma, contiene tutta l'informazione che serve per ricostrire il grafico tempo – velocità. Ci occupiamo ora del problema inverso: vedremo che il grafico tempo – velocità contiene QUASI tutta l'informazione necessaria a ricostruire il grafico tempo – posizione.

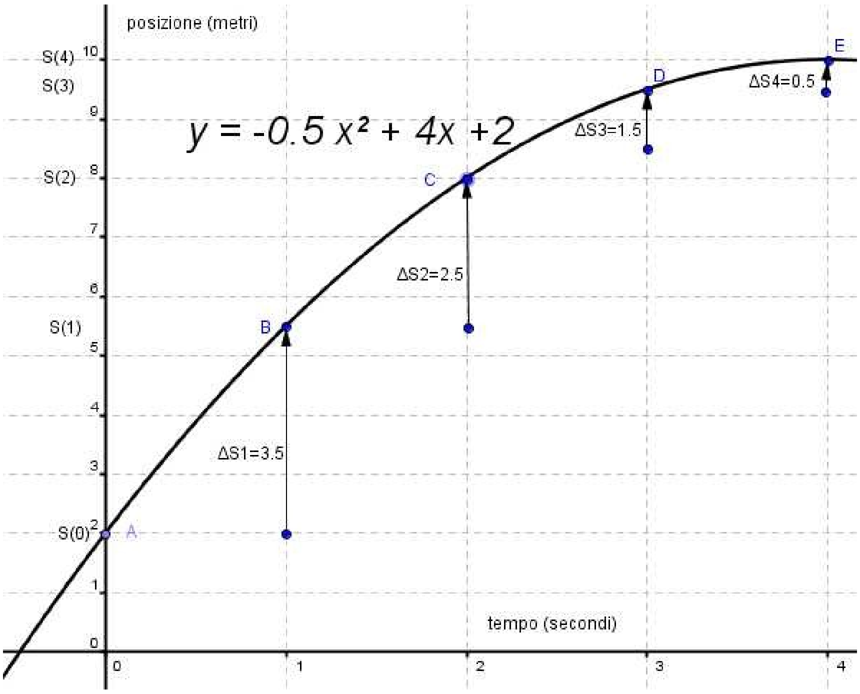
Se conosciamo il grafico tempo – velocità di un moto (a partire dal tempo 0) possiamo ricostruire il grafico tempo – posizione, purchè si conosca l'informazione iniziale: la posizione dell'oggetto all'istante 0.
Vediamo la cosa con un esempio concreto. Supponiamo che il grafico tempo- velocità abbia il seguente aspetto:



Il grafico tempo – velocità è in questo caso una retta di pendenza –1 e intercetta 4. Ciò significa che l'equazione della retta è y = 4 – 1*x, cioè $v = v_0 + a*t$, dove la variabile y è la velocità v, la variabile x è il tempo t, $v_0 = 4$ m/s, $a = -1$ m/s^2.

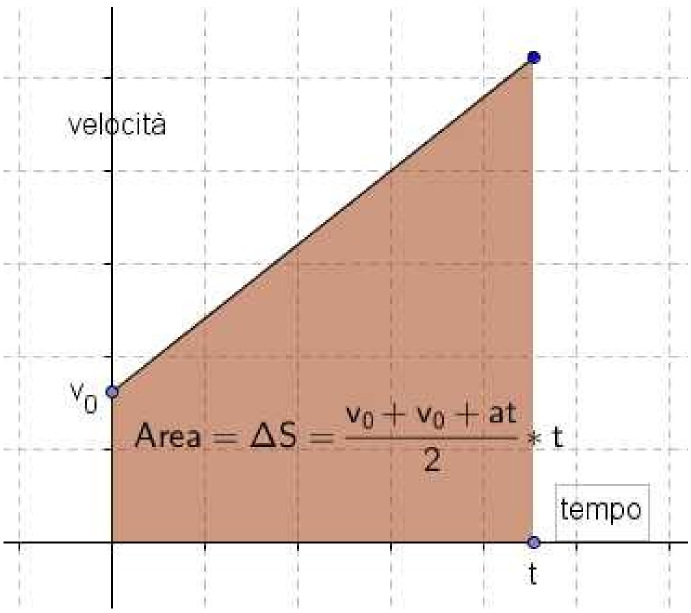
La porzione di piano tra il grafico della velocità e l'asse orizzontale è stata divisa in 4 pezzi, ciascuno a forma di trapezio, di area via via sempre più piccola. L'area di ciascun pezzo rappresenta la distanza percorsa nel rispettivo intervallo di tempo.

Ora proviamo a ricavare il corrispondente grafico tempo – posizione: tutto quel che ci occorre sapere è dove si trova il corpo all'istante 0. Il resto lo si ricava dal grafico tempo – velocità. Supponiamo che la posizione iniziale del corpo sia $S(0) = S_0 = 2$ m. Vogliamo determinare le successive posizioni a intervalli di un secondo, quindi S(1), S(2), S(3), S(4).Ciascuna posizione la si ricava dalla precedente, incrementandola della distanza percorsa nel corrispondente intervallo di tempo, distanza che abbiamo già calcolato esaminando il grafico tempo – velocità.



I punti che abbiamo ottenuto stanno su una parabola, quindi le ordinate si possono ricavare da un'equazione del tipo $y = Ax^2 + Bx + C$. Considerando l'intersezione con l'asse verticale ricaviamo C = 2 m. Considerando che il verice ha ascissa 4, un passo orizzontale lungo –1 dal vertice comporta un passo verticale –0.5, quindi il coefficiente direttivo è A = –0.5. Poichè l'ascissa del vertice è $-B/2A = -B/-1 = 4$ ricaviamo che B = 4. L'equazione della parabola è perciò $y = 2 + 4x - 0.5x^2$, cioè $S(t) = S_0 + v_0t + ½at^2$, dove $S_0 = 2$, $v_0 = 4$, $a = -1$.

Quanto abbiamo visto in un esempio numerico concreto è naturalmente valido in generale: l'area tra il grafico della velocità e l'asse delle ascisse, tra due istanti di tempo qualsiasi, rappresenta la distanza percorsa in quell'intervallo di tempo. Prendiamo come istante iniziale il tempo 0, come istante finale un generico tempo t:



L'area ha forma di trapezio, quindi vale $\Delta S = v_0t + ½at^2$. La posizione al tempo t sarà perciò $S(t) = S_0 + \Delta S = S_0 + v_0t + ½at^2$.