Le statistiche

Alcuni modelli per la rappresentazione dei dati

Scheda **1**

I consumi e i redditi

0. Le statistiche
1. Rappresentazioni dei numeri
2. Rappresentazioni proporzionali, istogrammi
3. Rappresentazioni percentuali, approssimazioni
4. Diagrammi a settori circolari, altri diagrammi
5. I valori medi
6. Cifre significative
7. Esercizi
➡ *Sintesi*
➡ *Specchietto con i principali tasti presenti sulle CT più diffuse*

0. Le statistiche

«Chi è il capocannoniere del campionato?», «Settembre 2008: record di precipitazioni», «Sono aumentati gli incidenti stradali», «Qual è la percentuale di italiani che evade le tasse?», «La popolazione italiana invecchia», «Al giovedì il programma serale più seguito dagli italiani è …», «Il Partito … ha guadagnato un punto percentuale rispetto alle precedenti elezioni», «Campionato di rugby: la capoclassifica sta tenendo una media di 39.2 punti per partita» … : ogni giorno sui giornali, alla televisione, nelle discussioni con gli amici, … ci troviamo di fronte a ***statistiche***, cioè alla valutazione dei fenomeni più disparati mediante numeri o rappresentazioni grafiche che ne indicano la frequenza o le dimensioni o l'incidenza o le variazioni nel tempo o …

Si tratta dell'uso della matematica socialmente più diffuso dopo la misura del tempo (lettura dell'orologio, calcolo del tempo trascorso, …) e il calcolo economico (calcolo del costo di un prodotto a partire dal costo unitario, calcolo del resto, …).

E si tratta dell'uso che presso la maggioranza delle persone caratterizza il *ruolo della matematica*: «le cifre non mentono», «i dati parlano da soli» sono dei luoghi comuni assai diffusi che rivelano l'idea che le rappresentazioni matematiche dei fenomeni diano luogo a valutazioni rigorose. Questo pregiudizio è spesso sfruttato da chi vuole convincere gli altri della bontà delle proprie scelte o della convenienza del prodotto che vende o del fatto che le cose in un certo campo vanno bene o vanno male: si "sparano" un po' di percentuali e di grafici, come a dire «le cose stanno così: lo dice la matematica».

«2+2 fa 4» è un fatto matematico che non può essere messo in discussione. Ma, anche se si fanno esattamente i calcoli numerici, non è detto che si siano presi i dati più significativi o che si sia scelto il modello matematico più adeguato per rappresentare il fenomeno da analizzare. I dati statistici vanno letti e *interpretati* per quello che sono, senza trarre conclusioni errate e cercando di valutare criticamente quelle che gli altri ci propongono.

In questa ***unità didattica*** verranno presentati e discussi alcuni dei modelli matematici più utilizzati nelle statistiche diffuse dai mezzi di informazione. Prenderemo in considerazione esempi riferiti a campi diversi, scelti tra quelli di interesse più generale: l'economia delle famiglie (consumi e redditi), lo sport (i record), le caratteristiche fisiche della popolazione (dimensioni e sviluppo del corpo), la scuola (promossi, bocciati, abbandoni, …).

In questa ***prima scheda*** vedremo l'impiego di alcuni strumenti matematici per elaborare statistiche sui *consumi* e sul *reddito* in Italia, con particolare riferimento alle condizioni di vita nel corso del Novecento.

I dati impiegati sono in gran parte tratti dalle pubblicazioni dell'*Istat* (Istituto nazionale di statistica), che raccoglie ed elabora informazioni relative a numerosi aspetti sociali ed economici dell'Italia.

1. Rappresentazioni dei numeri

Nella tabella (1.1) è riportato quanto si è speso in beni di consumo (alimenti, vestiti, automobili, …) e in servizi (taglio dei capelli, viaggi in treno, …) in Italia. I dati si riferiscono ai consumi "finali" (ad esempio viene conteggiato quanto paga per una bibita chi va al bar ma non quanto la bibita è stata pagata dal proprietario del bar). Inoltre sono state escluse le spese fatte da enti "pubblici" (ad esempio i soldi spesi dai Comuni per le divise dei vigili). Per questi motivi i dati riportati nella tabella vengono chiamati *consumi finali interni privati*. Nel seguito spesso li chiameremo più semplicemente ***consumi***.

(1.1)

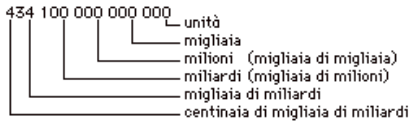
anno	alimentari	tabacco	vestiario	abitazione	trasporti	altro	*totale*
in milioni di lire							
1926	77 749	3 226	17 659	6 849	3 420	15 302	*124 205*
1945	941 645	13 189	50 572	19 307	12 857	160 700	*1 198 270*
in miliardi di lire							
1965	10 213	734	2 154	2 305	2 014	6 532	*23 952*
1985	116 148	9 306	35 756	45 238	58 919	168 733	*434 100*
in milioni di euro							
2010	144 291	18 461	71 352	210 285	119 857	386 256	*950 502*

1 E' vero che i consumi totali del 1985 sono inferiori a quelli del 1945?

2 Scrivi *in lettere* i consumi totali del 2010.

3 Scrivi *in cifre*, esprimendoti in lire invece che in milioni o miliardi di lire, i consumi totali del 1945 e del 1985. Secondo te *perché* nella tabella si sono usate unità di misura diverse?

I due dati scritti per esteso sono uno molto più grande dell'altro. Si usa dire anche che hanno ***ordini di grandezza*** diversi. Più precisamente nel caso di 434100 miliardi si dice che l'ordine di grandezza è *delle centinaia di migliaia di miliardi*, infatti il "4" sottolineato indica che l'ammontare è composto da 4 volte 100000 miliardi (e poi da 3 volte 10000 miliardi, 4 volte 1000 miliardi e 1 volta 100 miliardi).



[clicca per ingrandire]

4 Qual è l'ordine di grandezza di 1 198 270 000 000?

Nota 1. Per rendere più "leggibile" il numero 1198270000000 spesso, come abbiamo fatto nel quesito, si scrive 1 198 270 000 000, separando con degli spazi bianchi le cifre prese a tre a tre a partire dalla cifra delle unità. In questo modo ci è facile leggere il numero come 1 198 270 000 migliaia o come 1 198 270 milioni o come 1198 miliardi e rotti.

A volte si usa anche la scrittura: 1˙198˙270˙000˙000. Sono usate anche:

- 1.198.270.000.000 (ma ciò si può fare solo se per separare parte intera e parte frazionaria di un numero si usa "," invece di "." : 1333 e 5 decimi → 1.333,5);
- 1,198,270,000,000 (ma ciò si può fare solo se per separare parte intera e parte frazionaria di un numero si usa "." invece di "," : 1333 e 5 decimi → 1,333.5).

Nota 2. A volte, considerando ad esempio il numero 857, non si dice che ha ordine di grandezza *delle centinaia* ma che ha ordine di grandezza *del migliaio* perché 857 è "vicino" a 1000. Analogamente del numero 9306 miliardi si può dire sia che ha ordine di grandezza *delle* migliaia di miliardi, sia che ha ordine di grandezza *della* decina di migliaia di miliardi (è vicino a 10000 miliardi).

5 Come fai a calcolare con una *calcolatrice tascabile* (d'ora in avanti useremo spesso "*CT*" al posto di "calcolatrice tascabile" o "calcolatrici tascabili") i consumi totali mensili degli italiani nel 1945, cioè 1 198 270 000 000 : 12 ? (tieni conto che una CT in genere è in grado di visualizzare solo 8 o 10 cifre, non tutte le 13 cifre del 1° termine della divisione)

6 Una persona ha sostenuto le seguenti spese (in euro): 28.50, 1.25, 160.30, 0.50, 4.65. Per calcolare il totale batte sulla sua CT:

2850 [+] 125 [+] 16030 [+] 50 [+] 465 [=]

Ottiene 19520. Quant'è la spesa totale? Perché la persona ha proceduto in questo modo, invece di battere:

28.50 [+] 1.25 [+] 160.30 [+] 0.50 [+] 4.65 [=] ?

7 Completa quanto segue:

54300000 = *54.3* milioni

1.1 milioni = *1100000* ← *in cifre*

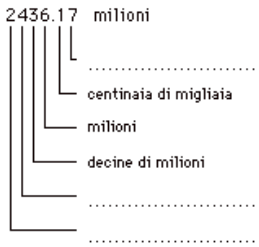
1 100 000 000 = _____ miliardi

436.2 miliardi = _____ ← *in cifre*

1250 = _____ migliaia

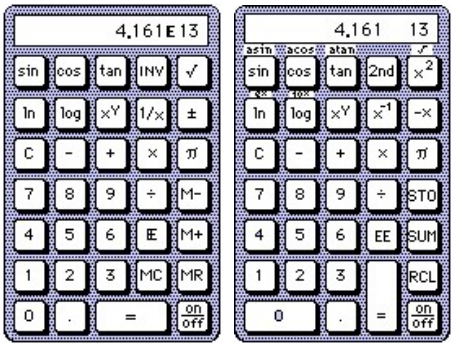
21.2 migliaia = _____ ← *in cifre*

41 610 000 000 000 = _____ decine di migliaia di miliardi



[clicca per ingrandire]

figura 1



Molte CT consentono di effettuare calcoli operando su (e ottenendo come risultati) numeri costituiti da più di 8 o 10 cifre.

Provate a calcolare con la vostra CT: 730000·57000000.

Molti di voi otterranno un risultato come quello che appare nelle CT di *figura 1*.

La lettera e che compare sulla CT di sinistra (in quella a destra al suo posto c'è uno spazio bianco) sta per "esponente". Infatti questa scritta è una abbreviazione di:

$$4.161 \cdot 10^{13} = 4.161 \cdot 10\,000\,000\,000\,000 \text{ (13 zeri)}$$

13 è l'esponente della potenza di 10 per cui deve essere moltiplicato il numero scritto a sinistra di e, cioè 10^{13} = 10·10·10·…·10 (13 volte 10) è l'"unità di misura" con cui viene rappresentato il numero.

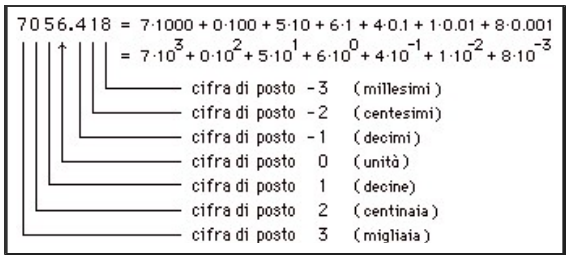
Anche chi usa la CT può usare scritte analoghe per battere numeri che altrimenti non starebbero sul visore. Infatti in queste CT è presente un tasto [E] (a volte indicato con EXP o con EE o ⅀, come in fig. 1). Ad esempio per calcolare 37 miliardi : 128 si può battere:

37 [E] 9 [÷] 128 [=]

8 A fianco è descritto un modo in cui si può eseguire il calcolo del ➡ quesito 5. 119827 [E] ... [÷] 12 [=]
Completa la descrizione e riporta il risultato che ottieni con la tua CT.

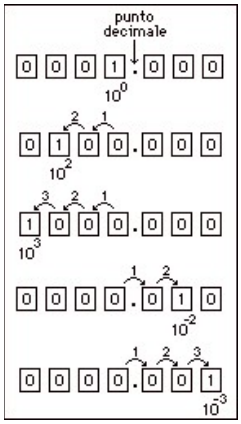
Osservate il riquadro a fianco:

Esso ricorda che cosa si intende per ***posto di una cifra***.



Ad esempio: 7 (cifra delle migliaia o di posto 3) indica quante volte deve essere preso 1000, cioè la potenza 10^3; 8 (cifra dei millesimi o di posto –3) indica quante volte deve essere preso 0.001, cioè la potenza 10^{-3}.

In altre parole una cifra ha posto n se è spostata di n posizioni (in avanti se n>0, indietro se n<0) rispetto a quella di ***posto 0***, cioè rispetto alla cifra delle unità.



Infatti in una *potenza di 10* l'esponente indica la posizione in cui va scritta la cifra "1":

10^2 per esteso diventa 100 (*2* posizioni *dopo* il posto 0),
10^{-2} diventa 0.01 (*2* posizioni *prima* del posto 0).

Avanzare di 1 posto equivale a moltiplicare per 10, avanzare di 2 posti (cioè moltiplicare due volte per 10) equivale a moltiplicare per 100, …
Analogamente retrocedere di 1 posto equivale a dividere per 10, retrocedere di 2 posti (cioè dividere due volte per 10) equivale a dividere per 100, …

Quindi, come 10^n (dove n può essere 1, 2, 3, 4, …, cioè un qualunque numero intero positivo) non è altro che il risultato della ripetizione della moltiplicazione per 10, così 10^{-n} non è altro che il risultato della ripetizione della divisione per 10:

0.1	=	10^{-1}	=	1/10			=	10^1
0.01	=	10^{-2}	=	1/10/10	=	1/100	=	10^2
0.001	=	10^{-3}	=	1/10/10/10	=	1/1000	=	10^3

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

Oltre a quanto visto per le potenze di 10, abbiamo che:

2^3 sta per 2·2·2 7^4 sta per 7·7·7·7 x^2 sta per x·x

Più in generale la scrittura $\boldsymbol{a^n}$ (n numero intero positivo) sta per $a{\cdot}a{\cdot}a{\cdot}\ldots{\cdot}a$ dove a compare n volte (a^1 sta per a, a^2 sta per $a{\cdot}a$, a^3 sta per $a{\cdot}a{\cdot}a$, …).

Il risultato del calcolo di a^n viene chiamato ***potenza*** n-esima ("ennesima") di a. L'operazione con cui a partire da a e n si ottiene a^n viene detta *elevamento* di a alla *potenza* n-esima. a e n vengono chiamati rispettivamente *base* ed *esponente* dell'elevamento.

9 Completa, se possibile, quanto segue (prima osserva i due esempi):

$25 = 5^{\cdots}$? faccio: $1 \xrightarrow{\cdot 5} 5 \xrightarrow{\cdot 5} 25$; deduco che $25=5^2$

$186 = 6^{\cdots}$? faccio: $1 \xrightarrow{\cdot 6} 6 \xrightarrow{\cdot 6} 36 \xrightarrow{\cdot 6} 216$; deduco che non esiste n tale che $186=6^n$

$16 = 4^{\cdots}$ $10 = 5^{\cdots}$ $81 = 9^{\cdots}$ $5 = 5^{\cdots}$ $16 = 2^{\cdots}$ $81 = 3^{\cdots}$ $27 = 9^{\cdots}$

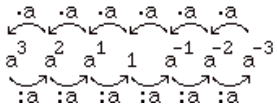
Se a è diverso da 0 si possono considerare anche le potenze di a con esponente non positivo. Ad esempio 2^{-3} sta per 1/2/2/2.

Riassumendo:

a^n con $n > 0$ è 1 *moltiplicato* ripetutamente n volte per a

a^n con $n = 0$ è 1

a^{-n} con $n < 0$ è 1 *diviso* ripetutamente n volte per a



Generalizzando quanto visto per il numero 10, osserviamo che dividere ripetutamente n volte per un numero a equivale a dividere per a^n; quindi:

(1.2) $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

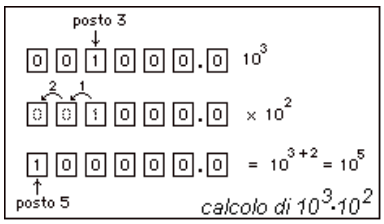
10 **(A)** *Osserva:*

$0.111\ldots = 3^{\cdots}$? $\quad 1 \xrightarrow{/3} 0.333\ldots \xrightarrow{/3} 0.111\ldots$; quindi: $0.111\ldots = 1/3/3 = 3^{-2} = 1/3^2$

Completa:

$0.125 = 2^{\cdots}$? $\quad 1 \xrightarrow{/2} \ldots$

(B) Poiché $8=2^3$, 1/8 equivale a 1/2/2/2. *Spiega* come calcoleresti mentalmente 68/8 sfruttando questa idea.



11 Utilizzando quanto suggerito dall'esempio a fianco completa i seguenti calcoli:

$10^6 \cdot 10^7 = \ldots$

$10^{-3} \cdot 10^9 = \ldots$

$10^{-2} \cdot 10^2 = \ldots$

12 Utilizzando quanto suggerito dall'esempio a fianco completa:

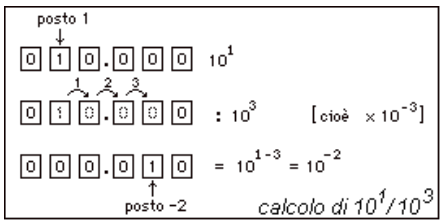
$10^6 / 10^4 = \ldots$

$10^6 \cdot 10^{-4} = \ldots$

$10 \cdot 10^{-5} = \ldots$

$10^2 \cdot 10^{-2} = \ldots$

$10^{-2} \cdot 10^{-5} = \ldots$



13 Un grano di polline ha lo spessore di circa 10^{-5} m (0.00001 m, cioè 0.01 mm, pari a un centesimo di millimetro).

Il diametro della Terra è di circa 10^7 m (cioè 10000 km, infatti $10000 = 10^4$, 1 km = 10^3 m e $10^4 \cdot 10^3 = 10^{4+3} = 10^7$).

Quanti grani di polline occorrerebbe sovrapporre per ottenere una pila spessa come la Terra, cioè quante volte 10^{-5} m sta in 10^7 m? (esprimi il risultato sia come potenza di dieci che a parole)

14 Per rappresentare 10^{20} su una CT si può battere 1 E 20 (che sta per $1 \cdot 10^{20}$). Per rappresentare 10^{-5} occorre invece battere 1 E 5 +/−. Infatti per visualizzare –5 occorre battere 5 e poi cambiargli segno con l'apposito tasto.
Utilizzando la CT controlla i calcoli del quesito 12.

Quanto visto nei quesiti 11 e 12 può essere riassunto nell'unica *formula* seguente (dove m e n rappresentano numeri interi qualunque, positivi o negativi o nulli):

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$$

Infatti ad esempio $10^6 \cdot 10^{-4} = 10^{6-4}$ può essere riscritta come $10^6 \cdot 10^{-4} = 10^{6+(-4)}$.

Anche $10^6/10^4$ può essere trasformato in $10^6 \cdot 10^{-4}$ e calcolato usando questa formula. Tuttavia può essere comodo ricorrere direttamente alla *formula*:

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

Ricordiamo che, più in generale, se a è un qualunque numero positivo o negativo e m e n sono numeri interi (positivi o negativi o nulli), valgono le formule:

(1.3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ **(1.4)** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

15 Se sostituisci a m il numero 0 e poi esegui i calcoli che si possono fare, come si trasforma la formula (1.4)?

16 Il tasto 1/x della CT a sinistra in ➡ figura 1 corrisponde al tasto x^{-1} della CT a destra: entrambi trasformano il numero che appare sul visore nel suo ***reciproco***. Con la CT trova il reciproco di 10, 4, 0.1, 0.2, 0.25, 5. Poi spiega (servendoti di una delle formule viste) l'equivalenza tra le due espressioni (1/x e x^{-1}) utilizzate per indicare i tasti delle due CT.

numero	10	4	0.1	0.2	0.25	5
suo reciproco						

La scrittura di un numero nella forma $h\cdot 10^n$ ($37\cdot 10^9$, $43.5\cdot 10^{23}$,…) viene detta ***notazione esponenziale***.

Le CT esprimono i risultati che non stanno per esteso sul visore in una particolare forma esponenziale, detta ***notazione scientifica***, di cui abbiamo già visto un esempio nella ➡ figura 1: il numero 41 610 000 000 000, la cui prima cifra ha posto 13, viene rappresentato come $4.161\cdot 10^{13}$. Altri esempi:

7412.5 ha ordine di grandezza delle migliaia; la prima cifra ha posto 3;
la sua rappresentazione in notazione scientifica è: $7.4125\cdot 10^3$

0.000 001 305 la prima cifra diversa da 0 ha posto -6;
la sua rappresentazione in notazione scientifica è: $1.305\cdot 10^{-6}$

In generale si tratta della notazione esponenziale $h\cdot 10^n$ che si ottiene prendendo come n il *posto* della prima cifra diversa da zero del numero.

h (che negli esempi precedenti è 4.161, 7.4125, 1.305) ha sempre una sola cifra (diversa da 0) a sinistra del punto decimale.

Invece di dire che 0.073 ($= 7.3\cdot 10^{-2}$) ha ordine di grandezza dei centesimi, si può dire più in breve che ha ordine di grandezza –2. Cioè si può definire come ***ordine di grandezza*** di un numero l'esponente n della sua scrittura in notazione scientifica.

17 Batti su una CT i seguenti numeri nella forma esponenziale indicata seguiti da =. Otterrai le loro espressioni in notazione scientifica; trascrivile e completa quanto segue.

12378 milioni = 12378E6 = … ordine di grandezza = …
0.236 miliardesimi = 0.236E–9 = … ordine di grandezza = …

2. Rappresentazioni proporzionali, istogrammi

Torniamo alla ➡ tabella (1.1). Il confronto diretto tra dati relativi ad anni diversi non è facile: non è possibile paragonare il valore di 1 lira nel 1945 con quello di 1 lira nel 1955 o nel 1985: il *potere di acquisto* è man mano diminuito; in altre parole è man mano aumentato il denaro necessario per comprare una stessa quantità di beni. Anche il potere di acquisto di 1 € ora è minore di quello che aveva nel 2002, quando è entrato in vigore.

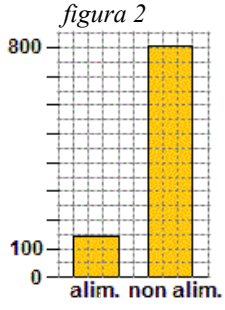
Del resto è evidente che, ad esempio, il consumo di sigarette, sigari, tabacco da pipa, … dal 1926 al 1985 non può essere cresciuto come è cresciuta la spesa in tabacco. Questa è passata da 3 miliardi a 9 mila miliardi, cioè si è moltiplicata per 3000, mentre la popolazione nel frattempo non è neanche raddoppiata (è passata da circa 40 milioni a circa 60 milioni): sicuramente un fumatore degli anni '80 non fumava migliaia di volte quanto fumava un fumatore degli anni '20!

Visto che non ha senso confrontare direttamente le differenze di una singola voce di consumo da un anno all'altro, possiamo studiare come è cambiato il modo di spendere i soldi *esaminando come sono mutati i rapporti tra una voce di spesa e l'altra*.

Alcuni cambiamenti balzano all'occhio osservando la tabella. Ad esempio nel 1945 si spendeva circa la stessa cifra in tabacco e in trasporti, nel 1985 si spendeva molto più in trasporti. Altri confronti sono meno evidenti. Vedremo ora dei metodi di rappresentazione dei dati che ci faciliteranno questo studio.

L'***istogramma*** in *figura 2* rappresenta graficamente i consumi alimentari e non alimentari nel 2010. Abbiamo deciso di rappresentare 100 miliardi di euro con l'altezza di 2 quadretti. Di conseguenza i consumi alimentari ($144291\cdot 10^6$ €) sono stati rappresentati con quasi 3 quadretti e quelli non alimentari ($806211\cdot 10^6$ €) con poco più di 8 quadretti.

figura 2



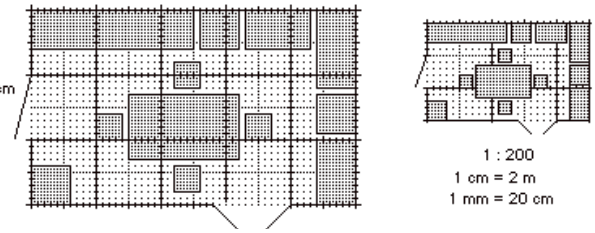
Il confronto tra le altezze dei due rettangoli ci dà subito un'idea visiva del rapporto tra i due consumi. Infatti *il rapporto tra le altezze dei rettangoli è uguale al rapporto tra i dati che esse rappresentano*.

Per comprendere meglio questo fatto facciamo riferimento alla *figura 3*, in cui sono raffigurate due diverse piantine su carta millimetrata della cucina di un appartamento. Le basi dei vari mobili sono state raffigurate tracciando lati con lunghezza pari alla lunghezza reale degli spigoli moltiplicata per la *scala*, cioè per il fattore di riduzione (vengono moltiplicate per 1/100, cioè divise per 100, in un caso, vengono moltiplicate per 1/200, cioè divise per 200, nell'altro).

Poiché tutte le distanze vengono moltiplicate per lo stesso fattore, i mobili *non* vengono rappresentati *sproporzionatamente*: sia in una piantina che nell'altra le basi dei mobili mantengono la forma che hanno nella realtà.

figura 3

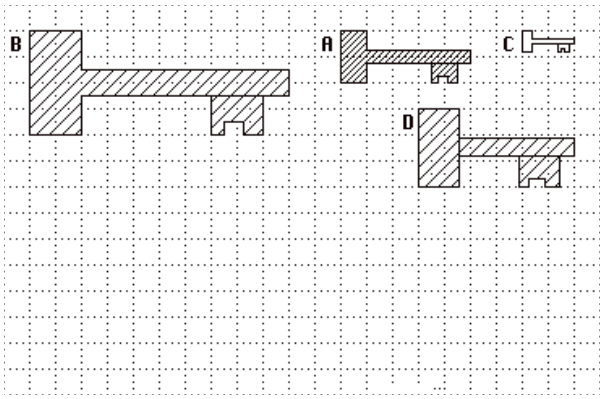
(clicca per ingrandire)



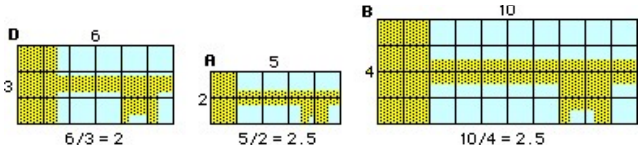
18 Sotto è raffigurata in dimensioni reali (disegno A, con tratteggio fitto) la chiave di un piccolo armadietto. B e C sono due sue riproduzioni in scala: un ingrandimento e un rimpicciolimento.

(1) Qual è la scala di B, cioè per quale numero sono state moltiplicate le dimensioni reali per ottenere B?
(2) Qual è la scala di C? (3) Disegna una riproduzione di A in scala 4.
(4) Il disegno D ti sembra una riproduzione proporzionata di A? Perché? Con quali misure e calcoli puoi confermare questa tua impressione?

figura 4



La chiave riprodotta in D appare più tozza rispetto a quella raffigurata in A: per essere proporzionata come A dovrebbe essere più lunga. Per tradurre questa impressione in termini quantitativi possiamo calcolare il rapporto tra lunghezza della chiave e altezza dell'impugnatura: nel caso A (vedi figura seguente) è 2.5, cioè la lunghezza è 2 volte e 1/2 l'altezza; nel caso D è 2, cioè la lunghezza è 2 volte l'altezza. Invece nel caso B abbiamo, come in A, il rapporto 2.5.



Invece di calcolare 10/4 e trovare che il risultato è 2.5 come nel caso di 5/2, potevamo osservare direttamente che il rapporto 10/4 è uguale al rapporto 5/2. Infatti:

$$\frac{10}{4} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} = \frac{5}{2}$$

La scrittura $\frac{5 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}}$ sta a indicare che $\frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2}$ può essere "semplificato" e trasformato in $\frac{5}{2}$

Procediamo analogamente quando per fare 600/40 ci riconduciamo al calcolo di 30/2:

$$\frac{600}{40} = \frac{60 \cdot 10}{4 \cdot 10} = \frac{60 \cdot \cancel{10}}{4 \cdot \cancel{10}} = \frac{60}{4} = \frac{30 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{30 \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2}} = \frac{30}{2}$$

In pratica utilizziamo il fatto che:

> *se i termini di una divisione vengono entrambi moltiplicati – o entrambi divisi – per uno stesso numero (diverso da 0) il risultato non cambia.*

Questa è la traduzione numerica di quanto abbiamo osservato a proposito delle riproduzioni in scala:

> *se le dimensioni di un oggetto* (i due lati del tavolo o la lunghezza e l'altezza della chiave o …)
> *vengono moltiplicate per la stessa scala, il rapporto tra tali dimensioni non viene modificato.*

Più in generale ogni volta che si moltiplica un insieme di dati per un fattore fissato si ottiene una rappresentazione *proporzionale* dei dati di partenza, cioè tale che il rapporto tra una coppia qualunque dei nuovi valori è uguale al rapporto tra la coppia dei valori originali. Per questo motivo una relazione del tipo:

(2.1) $$(grandezza2) = (grandezza1) \cdot k$$

dove k è un numero (diverso da 0) fissato, viene detta relazione di ***proporzionalità***.

Il numero k viene detto ***fattore di proporzionalità***. Nel caso particolare delle scale, se k>1 si parla di fattore (o scala) di *ingrandimento*, se 0<k<1 di fattore di *riduzione*.

19 Completa le seguente tabella, relativa a quattro diverse rappresentazioni proporzionali [figure: ➡ 3, ➡ 4, ➡ 2]

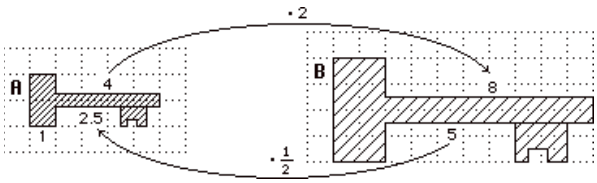
	grandezza1	*grandezza2*	*k*
fig.3 a sinistra	distanza reale	distanza nella pianta	
fig.3 a destra	distanza reale	distanza nella pianta	
figura 4	distanza in A		2
figura 2	valore monetario (in miliardi di €)		1/50

Anche nel caso della tabella ➡ (1.1) abbiamo una rappresentazione proporzionale: i dati reali sono stati rappresentati in milioni o in miliardi, cioè sono stati divisi per 1 milione o per 1 miliardo, ossia moltiplicati per $1/10^6$ ($= 10^{-6}$) o per $1/10^9$ ($= 10^{-9}$).

Anche le relazioni inverse sono relazioni di proporzionalità. Ad esempio, riferendosi alla ➡ figura 4,

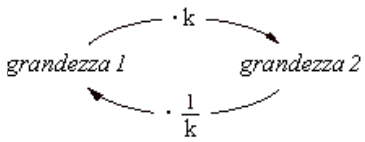
oltre a: *distanza in B* = (*distanza in A*) · 2

anche: *distanza in B* = (*distanza in A*) · $\frac{1}{2}$ è del tipo ➡ (2.1)



passando da A a B un tratto lungo 4 viene trasformato in un tratto lungo 4·2; passando da B a A un tratto lungo 5 viene trasformato in un tratto lungo 5·(1/2)

Generalizzando:

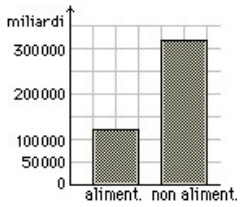


20 Se sulla CT batti 8 [1/x] [1/x] che cosa ottieni? … Descrivi questo fatto completando la frase:

Il reciproco del ..... di 8 è 8.

3. Rappresentazioni percentuali, approssimazioni

A fianco è tracciato l'istogramma relativo al 1985 della ➡ tabella (1.1). Esso consente di valutare facilmente la dimensione di un tipo di consumo rispetto all'altro, ma non fornisce immediatamente un'idea di *quanta parte del consumo totale* sia ciascuno di essi.



Per una informazione di questo tipo è conveniente rappresentare i due rettangoli consecutivamente, con un ***diagramma a striscia*** come il seguente:

figura 5

21 Qual è il fattore di proporzionalità che moltiplicato per la lunghezza (in quadrettini) di un rettangolo dà il corrispondente valore reale?

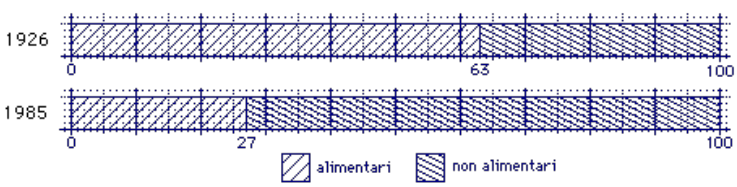
fattore di proporzionalità (diagramma → realtà) .....

e il fattore inverso, che moltiplicato per ciascun dato dà la lunghezza (in quadrettini) del rettangolo corrispondente?

fattore di proporzionalità (realtà → diagramma) $\frac{1}{\text{.....}}$

Se vogliamo confrontare i consumi relativi ad anni diversi ci conviene utilizzare diagrammi a striscia della stessa lunghezza. Una scelta possibile è la seguente:

figura 6



Si può ad esempio osservare che l'incidenza dei consumi non alimentari nell'arco di 60 anni (cioè in due generazioni, dai nonni ai loro nipoti) è raddoppiata.

Le rappresentazioni sono state ottenute rappresentando il totale dei consumi con 100 quadrettini. Perché questa scelta?

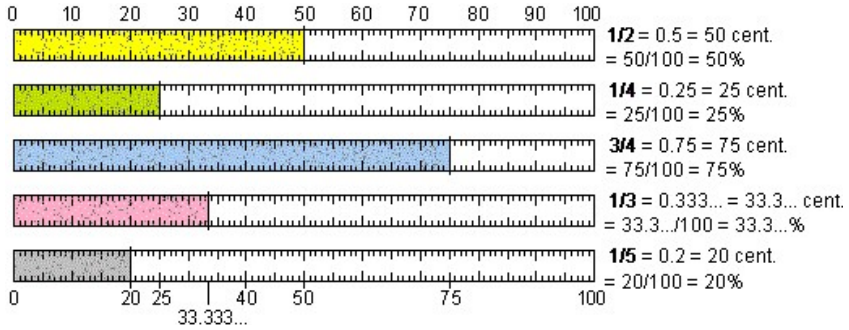
Perché è *comoda*. Infatti da una parte, come vedremo fra poco, la scelta del numero 100 facilita i calcoli. Dall'altra i dati sono rappresentati da numeri (di quadrettini) compresi tra 0 e 100, facili da ricordare e, per l'abitudine che abbiamo ad usare sistemi di misura decimali (ad esprimere mezzo metro come 50 cm, un quarto di etto come 25 grammi, un terzo di litro come 33 cl, …), facili da confrontare tra loro e con il totale (100).

Possiamo addirittura fare a meno del diagramma: una volta che sappiamo che nel 1985 i consumi alimentari erano 27 centesimi del totale, riusciamo a immaginarci una striscia lunga 100 e una sua parte lunga 27, cioè pari a poco più di 1/4 di striscia.

Se invece del modello grafico si usa solo la rappresentazione delle parti sotto forma di *centesimi* del totale, si parla di rappresentazione in ***parti percentuali*** (o semplicemente *percentuali*). Questa espressione deriva dal fatto che al posto dell'espressione «27 centesimi» (27/100) si usa spesso l'espressione «27 *per cento*», scritta in genere così: *27%*.

22 Con diagrammi come quelli di fig. 6, si perdono delle informazioni sulla situazione rappresentata rispetto a diagrammi come quello di fig. 5; quali? In compenso quali informazioni in più si ottengono?

Il disegno seguente richiama e mette in relazione diversi modi di esprimere i rapporti.

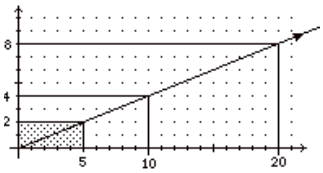


23 Come suggerisce il disegno precedente, per rappresentare il rapporto tra 2 e 5 su una striscia graduata puoi procedere in due modi:

(1) dividere la striscia in quinti, cioè in 5 parti uguali, e prenderne 2; oppure:
(2) calcolare 2/5, esprimere il risultato in centesimi e considerare una quantità di segmentini pari al numero di centesimi così trovato

Procedi in entrambi i modi sulle due strisce riportate qui sotto.

Come sono state calcolate le percentuali riportate in ➡ fig. 6?



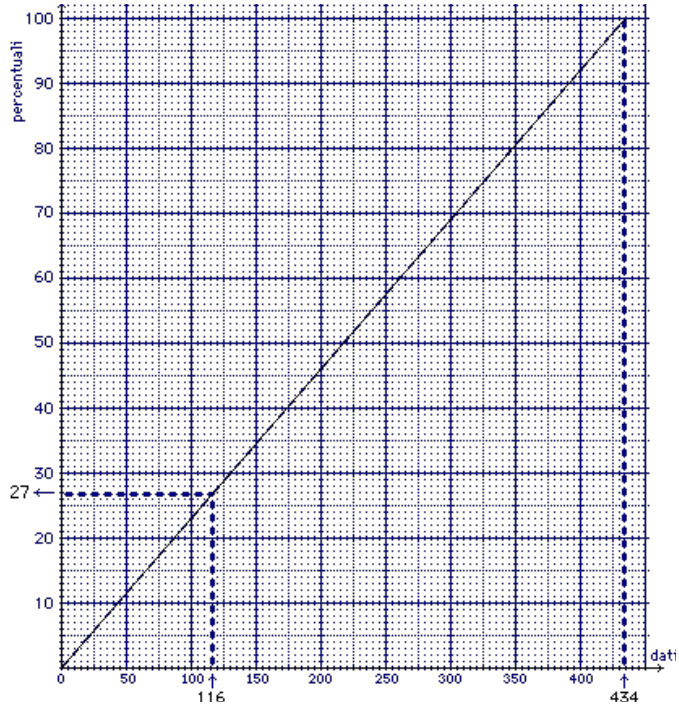
Ricordiamo (➡ *La matematica e i suoi modelli*, scheda 2) che il legame tra due grandezze proporzionali è rappresentato graficamente da una retta passante per il punto (0,0): un punto che si muova sulla retta conserva inalterato il rapporto tra coordinata verticale e coordinata orizzontale.

Da ciò segue la possibilità di calcolare le percentuali con un ***metodo grafico***.

Vediamo in dettaglio il procedimento da impiegare e, a destra, la sua esemplificazione riferita a ➡ figura 7: come si è trovata la percentuale dei consumi alimentari nel 1985, cioè il rapporto tra il *dato* 116 e il *totale* 434.

– *scegliamo opportune "scale" in modo da rappresentare facilmente sull'asse orizzontale i dati e sull'asse verticale le relative percentuali;*	– per ottenere numerazioni degli assi facilmente leggibili con un quadretto grande abbiamo rappresentato in orizzontale 50 e in verticale 10;
– *tracciamo la retta che congiunge (0,0) e (*totale*,100);*	– abbiamo unito (0,0) e (434,100);
– *per ogni* dato *individuiamo il punto di questa retta che ha come ascissa* dato*;*	– abbiamo proceduto verticalmente partendo dalla posizione sull'asse orizzontale che rappresenta 116, fino a intercettare il grafico;
– *l'ordinata di questo punto è la* percentuale *cercata.*	– abbiamo proseguito orizzontalmente incontrando l'asse verticale nella posizione che corrisponde circa alla tacca 27 (è la tacca più vicina).

figura 7



24 Procedi analogamente per trovare la percentuale costituita dai consumi riportati sotto la voce "altro" (168.7… migliaia di miliardi). .....%

Come possiamo procedere con un ***metodo numerico***? In due modi:

– esprimere in forma percentuale il rapporto tra il dato e il totale:

(**3.1**) $$percentuale = \frac{dato}{totale} \cdot 100$$

oppure

– moltiplicare il dato per il fattore di proporzionalità (rapporto tra nuovi valori e valori originali):

(**3.2**) $$percentuale = dato \cdot \frac{100}{totale}$$

E` evidente che (3.1) e (3.2) sono equivalenti: moltiplicando per 100 prima della divisione per *totale* o dopo di essa si ottiene comunque lo stesso numero.

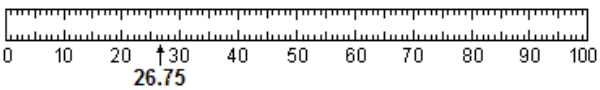
25 Utilizzando (3.1) o (3.2) calcola la percentuale delle spese per alimentari (116148 miliardi) rispetto al totale dei consumi (434100 miliardi) nell'85 e riportala così come è visualizzata dalla CT. Scrivi anche quali valori hai *sostituito* alle *variabili* presenti nella formula.

dato ← ..... *totale* ← ..... *percentuale* visualizzata dalla CT: .....

Si può procedere analogamente per trovare la percentuale rappresentata dai consumi non alimentari. Si ha dunque:

percentuale costituita dai consumi alimentari: 26.756047
percentuale costituita dai consumi non alimentari: 73.243953

Se ci interessa rappresentare i dati su diagrammi a striscia come quelli di fig. 6 dobbiamo trovare la lunghezza in quadrettini delle varie parti in cui suddividere la striscia. Nel caso di 26.756047 dobbiamo decidere se prendere 26 o 27 quadrettini, cioè se ***approssimare*** la percentuale con il numero intero 26 oppure con il numero intero 27.

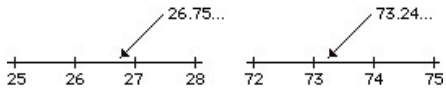


Possiamo scegliere tra una approssimazione:

– per ***troncamento***, cioè togliere tutte le cifre successive al posto degli interi (ossia tutte le cifre dopo il punto decimale), ottenendo 26, o:

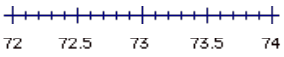
– ***al numero più vicino***, cioè prendere l'intero più vicino a 26.756…, ottenendo 27; questo secondo procedimento viene di solito chiamato ***arrotondamento***.

Se (come abbiamo fatto usando il metodo grafico) tra le tacche di separazione tra un quadrettino e il successivo vogliamo prendere quella più vicina al punto che rappresenterebbe esattamente il dato dobbiamo procedere per *arrotondamento*, e quindi prendere 27. Procediamo analogamente per 73.243…; otteniamo 73, ma in questo caso avremmo ottenuto lo stesso valore se avessimo proceduto per troncamento.



Nota. Molti impiegano la parola arrotondamento per indicare una qualunque approssimazione con un numero inferiore di cifre; noi nel seguito useremo in genere la parola "arrotondamento" nel significato di "approssimazione al numero più vicino".

26 In quali casi troncando e arrotondando alle unità si ottiene lo stesso numero intero? Completa la tabella seguente. Quindi evidenzia sul disegno sottostante l'intervallo dei numeri che vengono arrotondati a 73 ed evidenzia diversamente quello dei numeri che vengono troncati. L'intersezione tra i due intervalli è l'intervallo dei numeri cercati.



numero	arrotondamento	troncamento
72.03		
72.41		
72.53		
72.64		
72.72		
72.91		
73.09		
73.41		
73.56		

Una *regola per eseguire gli arrotondamenti alle unità* è dunque la seguente:

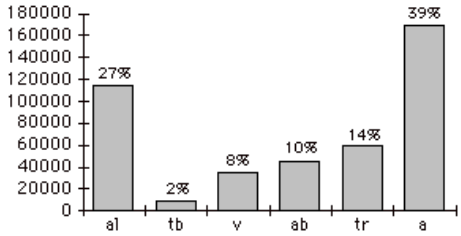
– se la cifra di posto inferiore a quello delle unità (cioè se la cifra dei decimi) è
  0, 1, 2 ,3 o 4 si prende il numero troncato alle unità,
– se è 5, 6, 7, 8 o 9 si prende il numero troncato alle unità e aumentato di uno

27 Completa la colonna centrale della seguente tabella usando una tra le formule ➡ (3.1) e (3.2) e arrotondando le percentuali agli interi. Completa la colonna destra senza usare la formula; come hai proceduto?

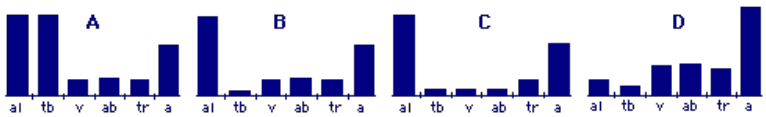
anno	% alim.	% non alim.
1926		
1945		
1965		
1985		
2010		

28 Sapreste spiegare perché nel 1945 i consumi alimentari rappresentavano una parte così rilevante del totale?

Analogamente a come abbiamo fatto per i consumi alimentari e non, possiamo rappresentare mediante istogramma le varie voci di consumo presenti nella tabella ➡ (1.1).
Ecco a fianco la rappresentazione relativa al 1985.



29 Individua quale, tra i seguenti istogrammi, rappresenta i consumi nel 1965. Non essendo stati riportati i valori numerici devi trovare la soluzione procedendo per esclusione.
Motiva la tua risposta (l'istogramma … *non va bene perché* … ; l'istogramma … non va bene perché … ; …).



Nella *figura 8* sottostante sono rappresentati mediante istogrammi i vari tipi di consumi negli anni 1926, 1945, 1965, 1985 e 2010. E` indicata anche l'incidenza percentuale di ciascuna voce di consumo. Controlliamo le percentuali relative al 1926.

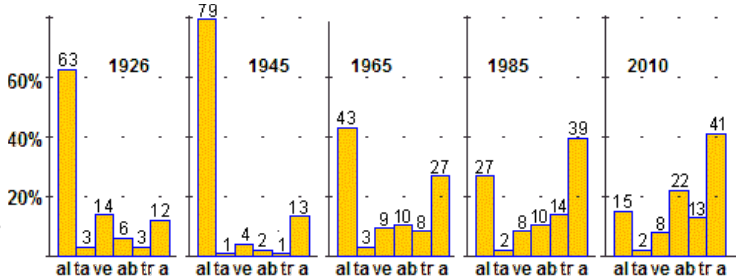


figura 8

Per fare il calcolo con la CT possiamo usare una tra le due formule ➡ (3.1) e (3.2):
– *totale* è 124205,
– *dato* assume man mano i valori: 77749, 3226, 17659, 6849, 3420, 15302.

Per evitare di battere 6 volte il valore di *totale* (il che, oltre a portar via tempo, fa aumentare la probabilità di premere dei tasti sbagliati e scrivere un numero diverso da 124205) possiamo impiegare la ***memoria*** della CT.

Qui ci riferiremo a CT simili a quelle della ➡ figura 1. In fondo alla scheda abbiamo riportato i tasti per l'uso della memoria di cui dispongono le più diffuse CT. Rinviamo alle indicazioni ➡ ivi contenute chi disponga di una CT di tipo differente.

Usando ➡ (3.1) posso ricopiare *totale* nella memoria *M* della CT (*M* ← *totale*) battendo:

124205 M+ con la CT di sinistra o 124205 STO con la CT di destra

(nel caso della CT di sinistra, se in *M* è già registrato un dato, occorre prima pulire la memoria con CM)

e poi battere:

77749 ÷ MR × 100 =		77749 ÷ RCL × 100 =
3226 ÷ MR × 100 =	oppure	3226 ÷ RCL × 100 =
17659 ÷ MR × 100 =		17659 ÷ RCL × 100 =

Per evitare di battere × 100 posso limitarmi a calcolare con la CT i rapporti *dato/totale,* cioè battere solo: 77749 ÷ MR =, 3226 ÷ MR =, … (o: 77749 ÷ RCL =, …) e mentalmente trasformare il risultato in forma percentuale (e arrotondarlo a valori percentuali interi).

30

	sul visore	forma percent.	arrotond.
77749 / *M*	0.62597319	62.59…%	63%
3226 / *M*	0.025973189	2.59…%	3%
17659 / *M*	0.14217624	14.21…%	14%
6849 / *M*	0.055142708		
3420 / *M*			
15302 / *M*			

Completa la tabella a fianco usando la CT per calcolare i rapporti e il calcolo mentale per le ultime due colonne.

Controlla se hai ottenuto le stesse percentuali riportate nella ➡ figura 8.

31 Usando la formula ➡ (3.2) si può procedere diversamente. Si può mettere in *M* il risultato di 100/*totale* (cioè il fattore di proporzionalità) e ogni volta calcolare *dato*·*M*. Descrivete la sequenza di tasti che dovete premere per effettuare questo calcolo e, su qualche dato, verificate la correttezza dei risultati che si ottengono in questo modo.

32 Dal confronto degli istogrammi di ➡ figura 8 è possibile notare come sia cambiata, dal 1926 al 1985, l'incidenza di ciascuna voce sul totale. Individuate per quali voci tale incidenza è aumentata, per quali è diminuita, per quali questi cambiamenti sono stati maggiori, …. Quali osservazioni potete fare, di conseguenza, sui cambiamenti nelle condizioni di vita? Quali consumi pensate siano compresi sotto la voce "*altro*"?

Abbiamo visto come utilizzare una CT per realizzare elaborazioni statistiche: l'utente, individuato il procedimento da impiegare, fa eseguire i singoli calcoli alla macchina. Con un computer si possono realizzare le stesse elaborazioni limitandosi a introdurre i dati, senza specificare man mano le operazioni aritmetiche da eseguire: basta che il procedimento di calcolo sia stato "memorizzato" sotto forma di *programma*.

Vediamo ad esempio l'uso del programma **R** per studiare come nel 1945 i consumi degli italiani si ripartivano nelle varie voci (vedi tabella seguente).

voci di spesa	alimentari	tabacco	vestiario	abitazione	trasporti	altro
milioni di lire	116148	9306	35756	45238	58919	168733

Basta che l'utente batta:

```
dati <- c(116148,9306,35756,45238,58919,168733); barplot(dati)
```

per ottenere il "diagramma a barre" sotto a sinistra della collezione di dati racchiusi in *c(...)*. La assegnazione dei valori avviene mediante "**<-**". Volendo posso specificare i nomi da mettere sotto alle colonne e tracciare una griglia, ottenendo il diagramma al centro:

```
etichette <- c("al","tb","v","ab","tr","a")
barplot(dati, names.arg=etichette, ylim=c(0,200e3))
abline(h = c(0,50e3,100e3,150e3,200e3), col="red", lty=3)
# abline(h = axTicks(2), col="red", lty=3)
```

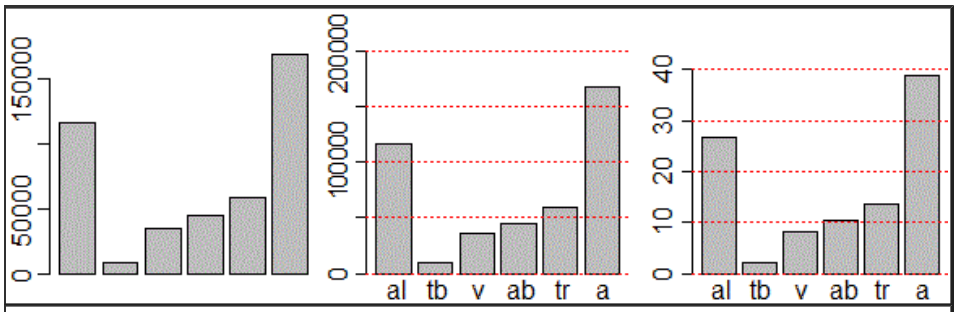
Il comando *ylim* specifica l'intervallo "verticale", da 0 a 200 mila. Il comando *abline* traccia delle linee rette orizzontali corrispondenti alle quote indicate (h = …); le traccia in rosso e tratteggiate (lty=3); *axTicks(2)* sceglie automaticamente le quote delle tacche. Volendo il diagramma con le frequenze percentuali posso fare:

```
datiperc <- dati/sum(dati)*100
barplot(datiperc, names.arg=etichette, ylim=c(0,40))
abline(h=axTicks(2),col="red",lty=3)
```

ottenendo il diagramma a destra. Se voglio i valori della somma e della distribuzione percentuale batto:

```
sum(dati); datiperc
434100
26.756047 2.143746 8.236812 10.421101 13.572679 38.869615
```

Il comando *sum* calcola la comma dei dati collezionati, *dati/...* esegue il calcolo indicato su tutti i valori collezionati in *dati*.



[clicca **qui** se vuoi installare e usare **R** (altrimenti clicca **qui**)]

33 Prova a usare **R** per calcolare le percentuali e fare gli istogrammi relativi alla ➡ tabella (1.1) e confronta con ➡ figura 8 quanto ottieni.

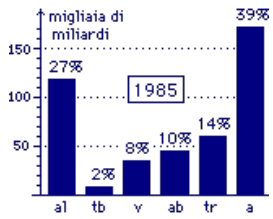
34 Nel 1989 in Italia un abitante ha consumato mediamente 26.3 kg di carne bovina, 26.5 kg di carne suina, 30.3 kg di carne di altro tipo (pollo, agnello, pesce,…); nel 1969 gli stessi consumi sono stati, rispettivamente, di 23.5, 9.3 e 17.5 kg. Per entrambi gli anni, calcola (aiutandoti con la CT) la distribuzione percentuale del consumo di carne e (utilizzando un foglio di carta millimetrata) tracciane l'istogramma. Rifai le stesse elaborazioni statistiche usando il programma **R** e confronta quanto hai ottenuto nei due modi.

35 Calcola la somma delle percentuali riportate nell'ultima colonna della tabella del ➡ quesito 30. Fa 100%? Trovate una spiegazione per questa "stranezza" del risultato e scrivetela in forma.

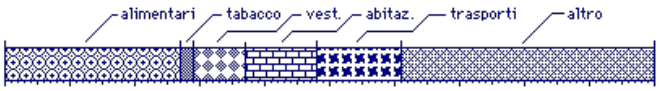
4. Diagrammi a settori circolari, altri diagrammi

Qui sotto abbiamo riprodotto parzialmente la ➡ tabella (1.1) sui consumi degli italiani e l'istogramma relativo al 1985. Abbiamo già osservato che mediante gli istogrammi si possono fare rapidamente delle valutazioni *a occhio*: riferendoci al 1985, possiamo osservare che la spesa per i consumi alimentari e quella per la voce "altro" hanno maggiore incidenza delle altre voci, che le spese per vestiario, abitazione e trasporti hanno un peso simile, … ; non siamo, però, in grado di valutare dal disegno quale incidenza abbia ciascuna categoria di consumi rispetto al totale (per ovviare a ciò sopra alle colonne si possono scrivere le percentuali, come abbiamo fatto nel caso raffigurato).

anno	aliment.	tabacco	vestiti	abitaz.	trasporti	altro	*totale*
in miliardi di lire							
1985	116 148	9 306	35 756	45 238	58 919	168 733	*434 100*
in milioni di euro							
2010	144 291	18 461	71 352	210 285	119 857	386 256	*950 502*



La rappresentazione a striscia facilita il confronto visivo tra una voce e il totale:



1985

ma risulta più difficile il confronto tra le varie voci. Ad es. si ha un'idea immediata dell'incidenza della voce "vestiario" ma (rispetto all'istogramma) risulta meno evidente che è inferiore a quella della voce "abitazione".

Un buon confronto visivo sia tra le varie voci che tra ogni voce e il totale è offerto da un ulteriore tipo di rappresentazione: il ***diagramma a settori circolari***.

Il totale viene rappresentato con un cerchio che è suddiviso in settori circolari in modo che le loro ampiezze siano proporzionali ai dati. Ad es., se consideriamo i consumi del 1985, suddivisi soltanto in alimentari e non alimentari, otteniamo il diagramma a fianco.

Come è stato ottenuto?

Il procedimento è del tutto analogo a quello impiegato per le percentuali. Per esse si è visto che si può:

- calcolare per ogni *dato* quanta parte è del *totale*, cioè il rapporto *dato*/*totale*, [nel nostro caso 116148/434100=0.267…, cioè i consumi alimentari sono 0.267… volte il totale dei consumi] e prendere la stessa porzione di 100 [0.267… volte 100, cioè 0.267…·100=26.7… arrotondabile a 27]:

(3.1) $$percentuale = \frac{dato}{totale} \cdot 100$$ <u>oppure:</u>

- moltiplicare ogni *dato* per lo stesso fattore che trasforma il *totale* in 100, ossia per 100/*totale*:

(3.2) $$percentuale = dato \cdot \frac{100}{totale}$$

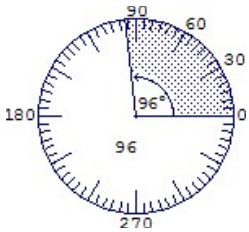
Abbiamo anche osservato che è facile verificare l'equivalenza di (3.1) e di (3.2): moltiplicando per 100 prima della divisione per *totale* o dopo di essa si ottiene comunque lo stesso numero.

Nel caso dei diagrammi a settori circolari il totale viene rappresentato dall'intero cerchio, cioè da 360°. L'*ampiezza* in gradi da associare a un particolare *dato* può quindi essere calcolata usando le formule che si ottengono da (3.1) e (3.2) mettendo 360 al posto di 100. *Scrivi* queste formule:

(**4.1**) *ampiezza* = (**4.2**) *ampiezza* =

36 L'incidenza della voce "alimentari" nell'85 è stata rappresentata con un angolo di 96°. Impiegando la CT e usando (4.1) o (4.2) verifica la correttezza di questa scelta. Scrivi, qui sotto, l'ampiezza così come appare sul visore della CT e il suo arrotondamento agli interi.

ampiezza (sul visore) = ... *ampiezza* (arrotondata) = ...



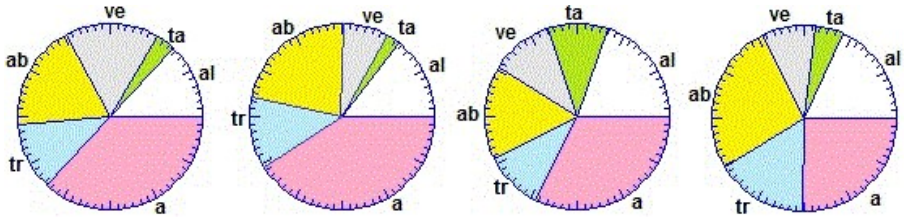
37 Marco dice: «invece di calcolare 116148·360/434100 o 116148/434100·360 sfrutto il fatto che i consumi alimentari sono il 27% del totale e per trovare la porzione di cerchio calcolo il 27% di 360°: 27/100·360». In questo modo ottiene 97.2 e quindi rappresenta i consumi alimentari con un settore ampio 97°. Come mai Marco ottiene un valore diverso dal nostro?

38 Per confrontare 4 con 20 posso impiegare il rapporto 4/20, lasciandolo indicato così o calcolando il risultato della divisione: 4/20 = 0.2 = 20%. Posso anche dire che:

- 4 sta … volte nel 20
- 20 è 5 volte 4
- 4 sta a 20 come 1 sta a 5
- il rapporto tra 4 e 20 è uguale al rapporto tra 1 e …
- 20 sta a 4 come … sta a 1
- il rapporto tra … e … è 1 a 5
- … è 1/5 di …
- 4 è … volte 20

Completa le frasi precedenti e, facendo corrispondere a 20 l'intero cerchio, *traccia* il settore corrispondente a 4 nelle seguenti figure (un raggio è già tracciato; utilizza la numerazione indicata e tieni conto che 4 è un quinto di 20).

39 Individua quale, tra i seguenti diagrammi, rappresenta i consumi nel 2010. Usa la ➡ tabella (1.1), riprodotta anche all'inizio del paragrafo, per capire quali diagrammi scartare e motiva la risposta (il diagramma … *non va bene perché* … ; …).

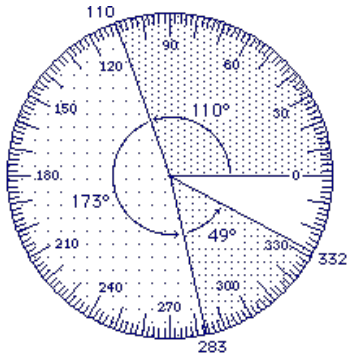


Vediamo come effettuare il calcolo quando si devono rappresentare più di due parti, ad esempio per ottenere diagrammi come quelli del quesito precedente. Sembra più conveniente l'uso di ➡ (4.2): si calcola il fattore di proporzionalità k (=360/*totale*) una volta per tutte, lo si memorizza e poi si calcola ripetutamente *dato*·k. Ecco che cosa si batterebbe, nel caso dei dati del 1985, con tre particolari CT (la colonna a destra si riferisce a un particolare calcolatore tascabile programmabile):

360 ÷ 434100 = M+	360 ÷ 434100 = STO	K = 360 ⁄ 434100 EXE
116148 × MR =	116148 × RCL =	116148 * K EXE
9306 × MR =	9306 × RCL =	9306 * K EXE

40 Con questo procedimento, i 5 dati della tabella seguente verrebbero rappresentati dalle ampiezze angolari sotto indicate, di cui riportiamo anche gli arrotondamenti alle unità di grado:

	dato1	dato2	dato3	dato4	dato5	totale
valori originali	21902	34506	9702	5704	186	72000
ampiezze angolari	109.51°	172.53°	48.51°	28.52°	0.93°	360°
ampiezze arrotondate	110°	173°	49°	29°	1°	360°

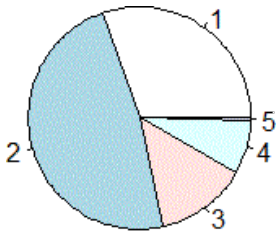


Prova a rappresentare questi dati completando il diagramma a settori a fianco. Incontri delle difficoltà?

Il problema a cui ti trovi di fronte è analogo a quello che ti si è presentato affrontando un quesito del ➡ paragrafo 3. Di quale quesito si tratta?

Per evitare situazioni come quella del quesito precedente ci conviene trovare direttamente la posizione in cui tracciare i raggi che separano i settori invece che trovarla man mano come somma dei valori arrotondati delle singole ampiezze.

Dopo avere tracciato il raggio iniziale che passa per la posizione 0°, la posizione del primo raggio di separazione può essere trovata usando direttamente (4.2) mettendo il valore del primo dato (*dato1*) al posto di *dato* e poi arrotondando il risultato; la posizione dei successivi raggi può essere calcolata prendendo come *dato* man mano *dato1*+*dato2*, *dato1*+ *dato2*+*dato3*, … e arrotondando i risultati.



È in questo modo che procedono il programma **R** ed altri simili; a fianco è riprodotto il diagramma che viene visualizzato nel caso del quesito precedente. Per ottenere il diagramma a settori occorre battere i comandi seguenti (*pie* sta per "torta"; volendo - come abbiamo già fatto ➡ per *barplot* - possiamo specificare le "etichette")

```
dati <- c(21902,34506,9702,5704,186); pie(dati)
```

Vediamo per esteso il calcolo delle ampiezze angolari seguendo questo nuovo procedimento (k è 360⁄72000):

$$\begin{aligned}
21902 \cdot k = 109.5\ldots &\rightarrow 110 \\
(21912+34522) \cdot k = 282.2\ldots &\rightarrow 282 \quad \text{(invece di 283)} \\
(21912+34522+9720) \cdot k = 330.5\ldots &\rightarrow 331 \quad \text{(invece di 332)} \\
(21912+34522+9720+5704) \cdot k = 359.0\ldots &\rightarrow 359 \quad \text{(invece di 361)}
\end{aligned}$$

Proviamo a tracciare il diagramma a settori relativo ai ➡ consumi nel 1985.

Dovremo calcolare (con k = 360⁄434100):

$$\begin{aligned}
al \cdot k = \ 96.32\ldots &\rightarrow 96 \\
(al + tb) \cdot k = &\rightarrow \\
(al + tb + v) \cdot k = &\rightarrow \\
(al + tb + v + ab) \cdot k = &\rightarrow \\
(al + tb + v + ab + tr) \cdot k = &\rightarrow
\end{aligned} \qquad \textbf{(4.3)}$$

Invece di mettere in memoria k, possiamo ricorrere al tasto M+ (o SUM), che consente di sommare il numero che appare sul visore a quello che è in M:

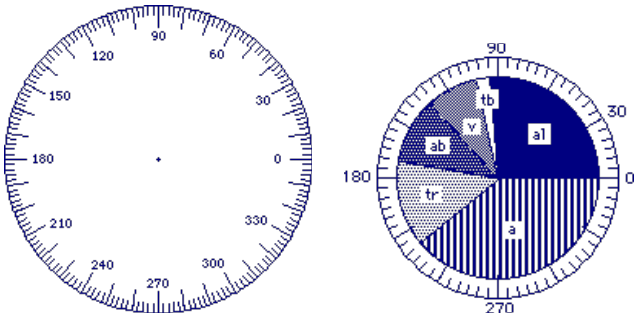
- calcoliamo una volta per tutte il valore di k ($8.293 \cdot 10^{-4}$) e lo annotiamo,
- usiamo M+ per non ribattere addendi (*al*, *tb*, …) già sommati in precedenza,
- usiamo MR (o RCL) per richiamare man mano la "somma parziale",

cioè battiamo la sequenza riportata sotto a sinistra (a destra è riportata la sequenza impiegabile con alcuni calcolatori tascabili programmabili):

al M+ × 8.293 E 4 +/− =
tb M+ MR × 8.293 E 4 +/− =
v M+ MR × 8.293 E 4 +/− =
ab M+ MR × 8.293 E 4 +/− =
tr M+ MR × 8.293 E 4 +/− =

A = *al* EXE B = *tb* EXE C = *v* EXE ...
A * K EXE
(A + B) * K EXE
(A + B + C) * K EXE

41 Procedi nel modo indicato (al primo uso di M+ o SUM ricordati di liberare la memoria da eventuali dati registrati in precedenza), riporta i risultati dei calcoli e degli arrotondamenti completando lo schema (4.3) e, infine, traccia il diagramma usando l'apposito cerchio graduato riportato sotto; verifica se ottieni una rappresentazione simile a quella raffigurata sulla destra.



42 In ciascuna delle rappresentazioni grafiche considerate per rappresentare i valori numerici della tabella iniziale abbiamo calcolato la misura di una grandezza geometrica. Individuala e completa il seguente schema.

istogramma	*lunghezza*
diagramma a striscia	.....
diagramma a settori circolari	.....

A volte questi diagrammi vengono anche chiamati ***areogrammi*** in quanto i dati non vengono rappresentati solo con segmenti aventi lunghezze ad essi proporzionali o con angoli aventi ampiezze ad essi proporzionali, ma con delle figure di area proporzionale:

– nel caso degli istogrammi abbiamo tracciato dei rettangoli di ugual base aventi per altezza le *lunghezze* ottenute,

– nel caso dei diagrammi a striscia abbiamo tracciato dei rettangoli di ugual altezza e aventi per base le *lunghezze* ottenute,

e i rettangoli in cui una dimensione è stata fissata hanno *area* che varia proporzionalmente all'altra dimensione,

– nel caso dei diagrammi a settori circolari abbiamo tracciato dei settori di egual raggio e formanti angoli delle *ampiezze* ottenute,

e i settori circolari di raggio fissato hanno *area* che varia proporzionalmente all'ampiezza dell'angolo.

Si possono realizzare istogrammi e diagrammi a settori circolari anche rappresentando i dati con delle figure solide aventi volumi proporzionali ai dati. In *figura 9* sono contenute diverse rappresentazioni degli stessi dati:

– tre istogrammi in cui i dati sono stati raffigurati con rettangoli di ugual base, con segmenti o con parallelepipedi di ugual base;

– due diagrammi a settori in cui i dati sono stati raffigurati con settori di uno stesso cerchio o con "spicchi" di uno stesso cilindro.

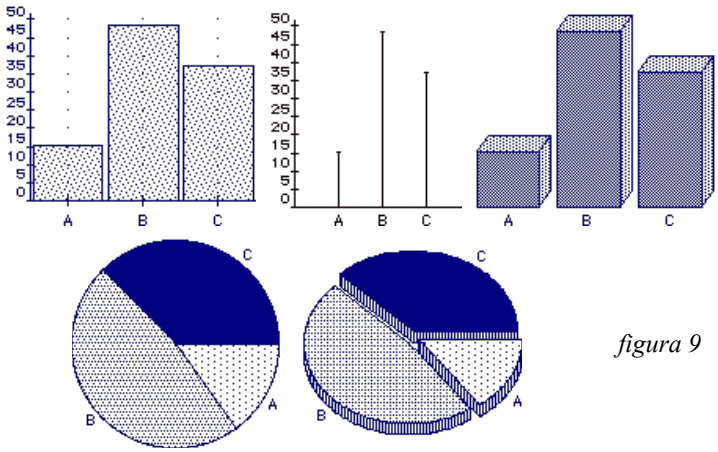


figura 9

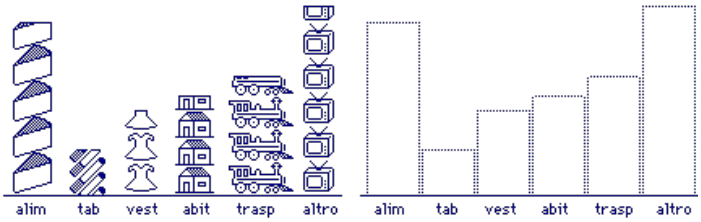
Le rappresentazioni dei dati con figure geometriche solide a volte vengono chiamate ***stereogrammi***.

I nomi che abbiamo impiegato sono derivati dalla lingua greca: *gramma* significa *disegno*, *istós* significa *telaio* ("istogramma" indica quindi una rappresentazione grafica a forma di telaio: i dati vengono rappresentati con delle figure disposte lungo righe parallele, così come accade per i fili nel telaio), *stereós* significa *solido*.

A volte si usano anche altri nomi. Ad esempio i diagrammi a settori circolari vengono chiamati anche *diagrammi a torta*, gli istogrammi a volte vengono chiamati *diagrammi a barre* (quando si usano segmenti) o *diagrammi a colonne* o *a canne d'organo* (quando si usano rettangoli di egual base).

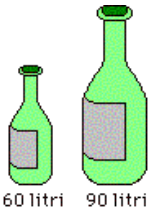
Vi sono poi gli ***ideogrammi***, cioè diagrammi in cui i dati sono rappresentati mediante figure simboliche in quantità o dimensione che varia in proporzione ai dati. Spesso (vedi *figura 10*) non sono altro che degli istogrammi dall'aspetto un po' più frivolo.

figura 10



Nei giornali e alla televisione alcuni tipi di ideogrammi sono spesso usati in maniera errata.

43 Un giornale per visualizzare il confronto tra la quantità di vino che in un anno beve in media un abitante del paese A e quella che beve in media un abitante del paese B usa l'ideogramma a fianco. Discutete la correttezza di questa rappresentazione.

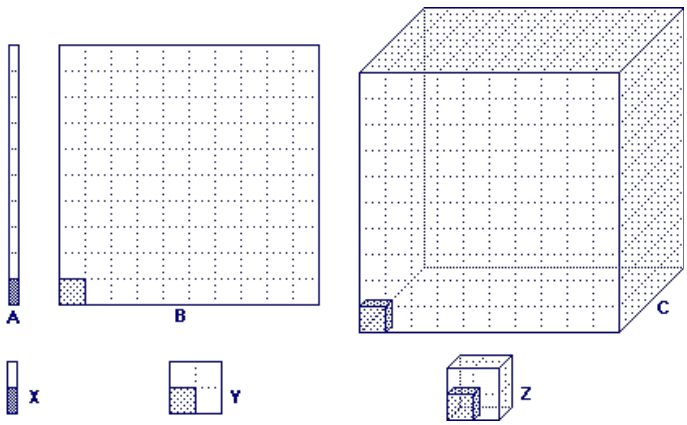


Se si ingrandisce una figura con il fattore di scala k il suo volume cresce maggiormente, di un fattore pari a k^3.

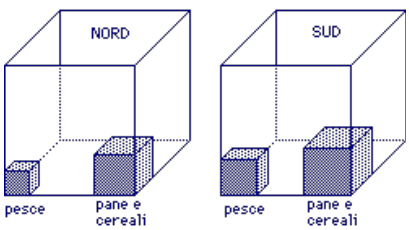
44 Completa la tabella seguente indicando per ciascuna delle figure il rapporto tra l'intera figura e la parte evidenziata (C e Z sono cubi).

EstensioneInteraFigura / EstensioneParteEvidenziata

A	**B**	**C**
X	**Y**	**Z**



Gli *stereogrammi* consentono il confronto di dati con ordini di grandezza molto diversi.



A fianco sono riportati due diagrammi in cui i dati vengono rappresentati con dei cubi. Il cubo "trasparente" rappresenta il totale (100%) dei consumi nel 1985, i cubi al suo interno rappresentano l'incidenza di alcune voci di spesa. Nel caso della spesa per pesce nell'Italia settentrionale l'incidenza è dello 0.6%; su un istogramma non avremmo potuto rappresentarla efficacemente.

5. I valori medi

I dati riportati nella tabella iniziale sono dati collettivi, indicano cioè il consumo complessivo della popolazione italiana. Dividendo il consumo complessivo per il numero degli abitanti si trova il ***consumo medio per abitante*** o ***consumo pro-capite***.

Se indichiamo con N la quantità degli abitanti e con c_1, c_2, … c_N i consumi di ciascuno degli N abitanti, possiamo scrivere:

$$consumo\ pro\text{-}capite = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_N}{N}$$

Più in generale si chiama ***media*** di più numeri il rapporto tra la loro somma e la loro quantità:

(**5.1**) $$media = \frac{numero_1 + numero_2 + \ldots + numero_N}{N}$$

A volte si usa l'espressione più estesa ***media aritmetica*** per distinguere questo valore da altri tipi di valori medi, di cui discuteremo più avanti.

Il consumo pro-capite è dunque la media aritmetica dei consumi effettuati da tutti gli abitanti. I consumi complessivi indicati nella tabella sono stati ottenuti servendosi dei dati relativi alla vendita dei vari tipi di beni e di servizi, non sommando i consumi abitante per abitante: dai dati sulle vendite si riesce a ottenere quanto ha speso il complesso degli italiani, cioè il valore di $c_1+c_2+\ldots+c_N$, non i valori di c_1, c_2, …, c_N.

45 Di quale informazione (ulteriore, rispetto a quelle fornite finora nella scheda) hai bisogno per calcolare il consumo pro-capite per l'abbigliamento nel 2010?

46 Sapendo che la popolazione presente in Italia nel 2010 era di 59.7 milioni, calcola il consumo pro-capite per l'abbigliamento ed esprimilo (opportunamente arrotondato) in euro.

È *come se* ogni persona avesse speso ..... € per vestirsi nel 2010, anche se la spesa per l'abbigliamento è un fenomeno che non si manifesta *in maniera uniforme nella popolazione*, ma c'è, ovviamente, chi spende di più e chi di meno.

Analogamente, se impieghiamo 2 ore per percorrere in auto una distanza di 170 km diciamo di aver tenuto una *media* di, o che siamo andati ad una *velocità media* di, 85 km/h; anche in questo caso, tuttavia, il movimento della macchina *non è uniforme nel tempo* del viaggio.

Velocità media e consumo pro-capite sono esempi di ***valori medi***, cioè di particolari modelli matematici impiegati per sintetizzare attraverso un unico numero il comportamento di un certo fenomeno.

La velocità media non è tuttavia un esempio di media aritmetica, cioè non è esprimibile nella forma ➡ (5.1). [per approfondimenti: ➡ ques. 56]

Anche se il consumo pro-capite è, come abbiamo detto, un dato fittizio, è sovente utile. Vediamo perché risolvendo gli esercizi seguenti.

47 Il consumo totale di caffè in Italia è stato, nel 1881 e nel 1981, rispettivamente di 140 e 2277 migliaia di quintali. Puoi dire che un italiano nel 1981 beveva 2277/140 = 16 volte (circa) la quantità di caffè che beveva un italiano cent'anni prima? Perché?

48 Controlla la tua risposta completando la seguente tabella relativa al consumo di caffè,

	popolazione ital. (migliaia)	consumo totale (quintali)	cons. pro-capite (g/ab.)
1881	29 791	$140 \cdot 10^3$	
1981	56 557	$2\,277 \cdot 10^3$	

arrotondando il risultato ai grammi (ossia esprimendo il risultato in grammi e arrotondandolo poi alle unità). Indica il procedimento seguito per eseguire i calcoli.

49 Il consumo totale di zucchero nel 1986 del Portogallo e dell'Irlanda è stato, rispettivamente, di 275 616 e 145 181 tonnellate. Puoi dire che in Portogallo si mangiava più "dolce" che in Irlanda? Perché?

Il consumo pro-capite è sovente preferibile perché, essendo indipendente dalla numerosità della popolazione, è *più facilmente confrontabile* con consumi relativi ad altri tempi (➡ quesiti 47 e 48) o ad altre zone geografiche (➡ quesito 49).

50 Sapendo che la popolazione presente in Italia nel 2010 era di 59.7 milioni, trova il consumo pro-capite totale e quello per ciascun gruppo di beni, arrotondando il risultato alle migliaia e usando il tasto-memoria della CT. Quale dato hai messo in memoria?

aliment.	tabacco	vestiti	abitaz.	trasporti	altro	*totale*

51 Esprimi la relazione tra *consumo complessivo*, *consumo pro-capite* e *numero di abitanti* completando le seguenti formule:

(**5.2**) *consumo pro-capite* =

(**5.3**) *consumo complessivo* =

(**5.4**) *numero di abitanti* =

La seguente tabella (5.5), che contiene i *consumi medi mensili per famiglia* relativi all'anno 2007, ci mostra che il consumo calcolato per tutto il paese è diverso da quello di ciascuna delle due zone geografiche: settentrionale e centrale, meridionale e insulare (zone che indicheremo con SC, MI). Ad esempio, in MI una famiglia per i trasporti mediamente spende molto meno che in SC; il dato relativo a tutta l'Italia è compreso tra quello delle due zone. Ciò conferma l'osservazione che abbiamo fatto circa la natura "fittizia" dei valori medi.

(**5.5**)

	aliment.	tabacco	vestiario	abitaz.	trasporti	altro	totale
SC	459.57	20.22	157.70	764.11	415.67	1320.53	2722.13
MI	480.49	24.10	153.00	450.88	260.09	600.70	1969.26
Italia	466.29	21.47	156.19	663.39	365.65	807.08	2480.07

52 Dalle prime voci della tabella sembra che la spesa familiare mensile in Italia sia pari alla *media aritmetica* di quelle nelle due zone SC e MI. Ma le ultime colonne successive fanno emergere qualche dubbio. Controlla numericamente tale ipotesi su questa voce.

$$\frac{\textit{spesa per trasporti in SC} + \textit{spesa per trasporti in MI}}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Quale sarebbe stato il modo corretto per ottenere il consumo medio per famiglia in Italia a partire da quelli di SC e MI?

Avremmo dovuto ricordare il significato di consumo medio, cioè utilizzare ➡ (5.2), mettendo

consumo per famiglia e *numero di famiglie* al posto di
consumo pro-capite e di *numero di abitanti*

Proviamo a farlo.

Utilizzando i dati della seguente tabella **A** e la relazione (5.3) possiamo completare le prime due righe dell'ultima colonna (riquadri con "?"). Mediante una semplice somma possiamo completare anche la colonna centrale (altro riquadro con "?"). Sotto è riportato il nuovo aspetto **B** della tabella. Non sono stati ancora completati i calcoli. Si noti che i calcoli sono stati impostati in modo da non portarsi dietro tutti gli zero.

Possiamo quindi passare a **C**, in cui abbiamo tenuto presente che per sommare le prime due righe dell'ultima colonna possiamo procedere senza tener conto dei 2 zero finali e poi aggiungerli alla fine.

A

	consumo per famiglia in trasporti	numero di famiglie	consumo complessivo in trasporti
SC	415.67	16 200 000	**?**
MI	260.09	7 680 000	**?**
Italia	**???**	**?**	**??**

↓

B

SC	415.67	16 200 000	41567 · 162 · 1000
MI	260.09	7 680 000	26009 · 768 · 100
Italia	**???**	23 880 000	**??**

↓

C

SC	415.67	16 200 000	41567 · 162 · 1000
MI	260.09	7 680 000	26009 · 768 · 100
Italia	**???**	23 880 000	(41567·1620+26009·768)·100

53 Usando ➡ (5.2) calcola il valore ??? (consumo medio per famiglia in trasporti relativo all'Italia), arrotondalo a 3 cifre (perché) e confrontalo con quello contenuto in ➡ (5.5).

consumo medio per famiglia in Italia = *consumo complessivo/numero di famiglie* =

$$= \frac{(\ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots) \cdot 100}{2388 \cdot 10000} =$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots\ldots}{2388} / 100 =$$

= ..... → [arrotondando a 3 cifre] .....

54 Scrivi la sequenza di tasti che conviene utilizzare per eseguire il calcolo precedente con la tua CT.

Abbiamo visto che la media aritmetica dei consumi per famiglia delle due zone geografiche non coincide con il consumo per famiglia italiano.

Ciò dipende dal fatto che le spese per famiglia delle due zone influiscono diversamente sul consumo complessivo in quanto il numero delle famiglie, per cui vengono moltiplicate, è diverso nei due casi. Si dice che la spesa familiare di ciascuna zona ha un *peso* diverso sulla spesa familiare in Italia.

Dalla ➡ tabella (5.5) si vede che la spesa media in Italia è più vicina alla spesa media in SC che a quella in MI. Infatti in SC sono presenti più famiglie che in MI, e quindi il valore relativo a SC "pesa" maggiormente, facendo avvicinare a sé il valore relativo all'intero paese. La situazione è analoga a quella raffigurata a fianco: il punto di equilibrio è più vicino all'oggetto che pesa maggiormente.

55 La famiglia Bianchi è composta da due bambini piccoli, dai loro due genitori e dai nonni paterni. In questa famiglia gli adulti consumano a testa mediamente 1/5 di litro (200 ml) di latte al giorno mentre i bambini ne consumano mediamente 1/2 litro (500 ml) a testa. Poiché (200+500)/2 = 350, è corretto affermare che il consumo medio giornaliero di latte di un membro della famiglia Bianchi è di 350 ml?

Si presenta una situazione analoga se confrontiamo le *velocità medie* su due tratti di strada con quella relativa all'intero percorso.

56 Il signor Rossi per raggiungere il posto di lavoro deve percorre 12 km per arrivare al casello autostradale più vicino e ulteriori 35 km di autostrada. In un dato giorno il signor Rossi andando a lavorare impiega 30 minuti per il tratto cittadino e 20 minuti per il tratto autostradale.

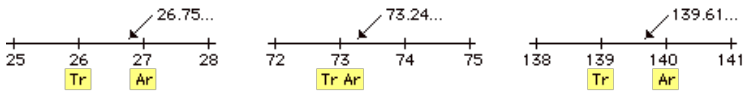
- Qual è la velocità media del signor Rossi in ciascuno dei due tratti?
  $v_{tratto1}$ = $v_{tratto2}$ =
- Qual è la velocità media del signor Rossi sul percorso complessivo? v =
- Confronta v con la media di $v_{tratto1}$ e $v_{tratto2}$. *media* di $v_{tratto1}$ e $v_{tratto2}$ =

6. Cifre significative

Abbiamo visto che un numero può essere approssimato agli interi:

- per ***troncamento***, cioè togliendo tutte le cifre successive al posto delle unità, o:
- per ***arrotondamento***, cioè prendendo l'intero *più vicino*, e, più precisamente:
  - se la cifra a destra di quella delle unità (cioè se la cifra dei decimi) è
    0, 1, 2, 3 o 4 prendendo il numero troncato alle unità,
  - se è 5, 6, 7, 8 o 9 prendendo il numero troncato alle unità e aumentato di uno.

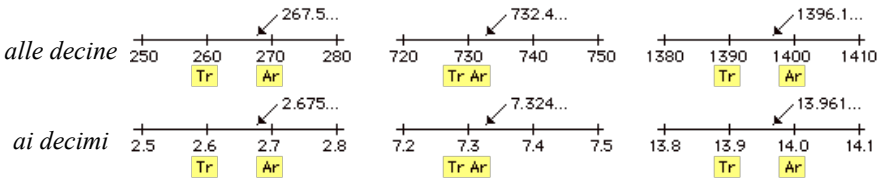
Sotto sono raffigurate due situazioni (la 1ª e la 3ª) in cui troncamento e arrotondamento sono diversi e una (la 2ª) in cui coincidono.



Per *troncare* 238 712 alle migliaia, poiché 238712 = 238.712 migliaia, trovato il troncamento agli interi di 238.712, cioè 238, possiamo prendere 238 mila, ossia 238 000. Per *arrotondarlo* alle migliaia, poiché l'arrotondamento agli interi di 238.712 è 239, prendiamo 239 mila, ossia 239 000.

In altre parole per troncare alle migliaia sostituiamo con 0 tutte le cifre a destra di quella delle migliaia; per arrotondare alle migliaia procediamo analogamente e poi aumentiamo di 1 migliaio il numero ottenuto se la prima cifra a destra di quella delle migliaia è maggiore o uguale a 5.

Qui sotto sono raffigurati alcuni arrotondamenti alle decine e ai decimi, realizzabili con ragionamenti simili: 13.961… ai decimi viene troncato con 13.900…, o 13.9; poiché la cifra a destra di quella dei decimi è 6, che non è minore di 5, per ottenere l'arrotondamento dobbiamo aggiungere 0.1 (1 decimo): 13.9 → 14.0.



57 Con ragionamenti simili esegui i seguenti *arrotondamenti*:

3456 alle decine	.....	6825750 ai milioni	.....
163 alle decine	.....	0.3695 ai centesimi	.....
84126500 ai milioni	.....	2.471 ai centesimi	.....

Consideriamo la seguente tabella (che hai già completato ➡ nell'esercizio e3), relativa alla retribuzione annua lorda di un dipendente pubblico di medio livello in diversi anni in cui era in vigore la lira. Abbiamo aggiunto in fondo i dati non arrotondati presenti nelle statistiche ufficiali da cui li abbiamo ricavati e le cifre a cui sono stati approssimati.

	1926	1945	1965	1985
forma esp.	$9.15\cdot10^3$ L	$7.34\cdot10^4$ L	$1.42\cdot10^6$ L	$1.71\cdot10^7$ L
ord. grand.	migliaia	decine di migliaia	milioni	decine di milioni
per esteso	9150	73400	1420000	17100000
non arrotondato	*9151*	*73360*	*1415937*	*17099865*
arrotondamento alle	decine	centinaia	decine di migliaia	centinaia di migliaia

Tutti i dati (come si vede bene nella loro scrittura in forma esponenziale) sono stati arrotondati alla terza cifra iniziale (cioè alla terza cifra contando verso destra a partire dalla prima cifra diversa da 0).

Nel caso di 17099865 L la terza cifra iniziale (cifra sottolineata) era quella delle centinaia di migliaia; la cifra alla sua destra era 9, 9 è maggiore di 4, quindi 0 è stato aumentato di 1 e si è ottenuto 171….

Nel caso di 9151 L la terza cifra iniziale era quella delle decine; alla sua destra c'era 1, 1 è minore di 5, quindi la cifra non è stata aumentata.

In tutti i casi si dice che i dati sono stati arrotondati a 3 ***cifre significative***.

Se 9151 fosse stato arrotondato a 1 cifra significativa, cioè alla 1a cifra iniziale, avremmo ottenuto 9000; se fosse stato arrotondato a 2 cifre significative, avremmo ottenuto 9200 (infatti la 3a cifra iniziale è 5).

58 Arrotonda a due cifre significative i seguenti numeri:

3456	.....	84126500	.....	0.3695	.....
163	.....	6825750	.....	2.471	.....

Più in generale, se X è un numero:

- per ***arrotondare*** X alla cifra di ***posto n***:
  - se la cifra immediatamente a destra è
    0, 1, 2, 3 o 4 si sostituiscono con 0 tutte le cifre a destra del posto *n*
  - se è 5, 6, 7, 8 o 9 si aumenta di uno la cifra di posto *n* e
    si sostituiscono con 0 tutte le cifre alla sua destra
- per ***arrotondare*** X a ***n cifre significative*** si arrotonda alla *n*-esima cifra iniziale.

7. Esercizi

e1 Completa la seguente tabella, che ricorda il significato di alcuni prefissi impiegati per trasformare una unità di misura in un suo multiplo o un suo sottomultiplo.

moltiplicatore	*prefisso*	*espressione verbale*
0.000 000 000 001 = 1/1000 000 000 000 = 10^{-12}	p	pico
0.000 000 001 = 1/1000 000 000 = …	n	nano
0.000 001 = 1/ … = …	m	micro
0.001 = 1/ … = …	m	milli
1000 = 10^3	k	chilo
1000 000 = 10^6	M	mega
1000 000 000 = …	G	giga
1000 000 000 000 = …	T	tera

e2 È maggiore un migliaio di miliardi o un miliardo di migliaia o un milione di milioni?
un migliaio di miliardi = $10^9 \cdot 10^3 = 10^{9+3} = 10^{12}$
un miliardo di migliaia = $10^3 \cdot 10^9$ = … = …
un milione di milioni = … = …

e3 I seguenti dati rappresentano la *retribuzione annua lorda* (in lire) di un dipendente pubblico di medio livello negli stessi anni considerati nella tabella (1.1); la retribuzione lorda è lo stipendio non gravato da imposte (nel caso di un dipendente di questo livello le imposte incidevano complessivamente per una percentuale che, nei vari anni, ha oscillato intorno al 15%). Completa le righe sottostanti.

forma esp.	1926: $9.15 \cdot 10^3$ L	1945: $7.34 \cdot 10^4$ L	1965: $1.42 \cdot 10^6$ L	1985: $1.71 \cdot 10^7$ L
ord. grand.	1926: migliaia	1945:	1965:	1985:
per esteso	1926: 9150	1945:	1965:	1985:

e4 Se con le forbici dimezzo un foglio di carta, poi sovrappongo le due parti ottenute e le taglio a metà, poi sovrappongo i foglietti così ottenuti e procedo con un nuovo taglio, alla fine ottengo 2·2·2 foglietti; infatti ad ogni taglio raddoppio il numero dei foglietti. Quanti foglietti otterrei con 6 tagli? E con *n* (*n* numero intero positivo qualunque)? Impiegando il tasto x^y della CT calcola quanti foglietti si otterrebbero (impiegando una taglierina al posto delle forbici) con 10 tagli.

e5 (1) Moltiplicando tra loro due numeri, entrambi minori di 1, ottieni ancora un numero minore di 1?
(2) Moltiplicando tra loro due numeri, entrambi maggiori di 1, ottieni ancora un numero maggiore di 1?
(3) Che cosa puoi concludere sulla moltiplicazione tra due numeri, uno maggiore e l'altro minore di 1?

×	**<1**	**>1**
<1		
>1		

Rispondi e motiva le tue risposte (se è il caso, ricorrendo a degli esempi). Quindi riassumi le tue conclusioni nella tabella a fianco. Nelle caselle, a seconda dei casi, devi mettere " >1" (che sta per "numero maggiore di 1"), "<1" (che sta per "numero minore di 1") o "D" (che sta per "dipende").

e6 Disegna la pianta della tua classe, comprendente la cattedra e i banchi, su un foglio di carta millimetrata, indicando la scala (che puoi scegliere a tuo piacere).

e7 Abbiamo trovato che nel 1926 la voce trasporti (3420 milioni L) aveva un'incidenza del 3% sul totale dei consumi (124205 milioni L). Prova a calcolare il 3% di 124205. Riottieni il valore 3420? Trovate una spiegazione per questo fenomeno.

e8 Dalla tabella (1.1) risulta che in Italia nel 2010 si sono spesi 18 461 milioni (18 461 000 000) di € in tabacco. Ovviamente questo dato non è esatto, ma è stato arrotondato ai milioni (cioè è stato espresso in milioni e poi arrotondato alle unità). Inventa qualche valore che potrebbe rappresentare la spesa esatta.

e9 Osservate gli istogrammi di → figura 8. Il fatto che sia diminuita l'incidenza percentuale delle spese alimentari significa che gli italiani mangiano meno di un tempo?

e10 Non abbiamo sotto mano la CT e vogliamo eseguire alcuni calcoli. Non ci interessa il risultato esatto, ma solo una stima di esso. Possiamo precedere come nei seguenti esempi:

$2681/354 \approx 3000/400 \approx 30/4 \approx 7;$ $\qquad \frac{1860}{376891} \approx \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^5} = \frac{20 \cdot 10^2}{4 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^{-3} = 0.005;$

$15384 \cdot 187 \approx 15000 \cdot 200 = 3000000;$ $\qquad 89325 \cdot 714213 \approx 9 \cdot 10^4 \cdot 7 \cdot 10^5 = 63 \cdot 10^9 \approx 6 \cdot 10^{10}$

cioè arrotondando i numeri a 1 o 2 cifre significative ed eseguendo i calcoli sui valori arrotondati. *Esegui* analogamente le seguenti operazioni:

$843 \cdot 279615 \approx$

$\frac{843}{279615} \approx$

$\frac{3675843}{19} \approx$

e11 Vogliamo controllare o avere un'idea più concreta dei dati della → tabella (1.1). Proviamo ad esempio a stimare da soli l'ordine di grandezza di quanto si spendeva nel 2008 in trasporti. Gli spostamenti quotidiani sono quelli che incidono in massima parte su questa spesa; in prima approssimazione possiamo limitarci a un mezzo di trasporto pubblico, e supporre che una persona facesse mediamente due corse al giorno e che un biglietto costasse circa 2 €. Nel 2008 in Italia vi erano 60 milioni di persone.

Dobbiamo quindi calcolare:

(costo di un biglietto) · (n° delle corse) · (n° dei giorni in un anno) · (n° dei presenti in Italia) =
$2 \cdot 2 \cdot 365 \cdot 60000000$

Calcola questo valore senza usare la CT, come suggerito nel quesito precedente, e confronta l'ordine di grandezza del risultato con quello del valore indicato dalla tabella.

e12 Stima, in modo simile a quanto fatto nel quesito precedente, la quantità di parole presenti in questa scheda e la spesa complessiva in quaderni sostenuta dagli studenti della tua scuola in un anno scolastico.

e13 Accantonando 1 € alla settimana, quanto tempo impiegherai per mettere da parte la somma di 600 €?

e14 La tabella seguente permette di confrontare l'evoluzione (in lire) delle retribuzioni e quella della spesa pro-capite per beni alimentari. Le percentuali riportate nell'ultima colonna non indicano esattamente quanta parte dello stipendio veniva spesa mediamente in alimentari, infatti:

– con uno stipendio venivano mantenute più persone;

– la retribuzione considerata è quella di una particolare categoria di lavoratori; ve ne erano altre con stipendi più bassi, altre con stipendi più alti; e vi erano redditi non da lavoro dipendente (negozianti, artigiani, professionisti, imprenditori, proprietari terrieri, …).

La tabella dà comunque un'idea di come è cambiata l'incidenza delle spese alimentari.

anno	spesa totale per alimentari	popola-zione	spesa alimentare pro-capite	spesa pro-capite arrotondata	retribuzione del dipendente del → quesito e3	rapporto (percent.) tra spesa alimentare pro-capite e retrib.
1926	$7.77 \cdot 10^{10}$	$4.0 \cdot 10^{7}$	$1.9425 \cdot 10^{3}$	$1.94 \cdot 10^{3}$	$9.15 \cdot 10^{3}$	21%
1945	$9.42 \cdot 10^{11}$	$4.5 \cdot 10^{7}$	$2.0933\ldots \cdot 10^{4}$	$2.09 \cdot 10^{4}$	$7.34 \cdot 10^{4}$	29%
1965	$1.02 \cdot 10^{13}$	$5.2 \cdot 10^{7}$	.....	.....	$1.42 \cdot 10^{6}$	.....
1985	$1.16 \cdot 10^{14}$	$5.7 \cdot 10^{7}$	.....	.....	$1.71 \cdot 10^{7}$	.....

Completa la tabella. Nella 5ª colonna ("spesa arrotondata") approssima i valori a 3 cifre significative, nell'ultima arrotonda le percentuali alle unità. Per calcolare il rapporto non battere i dati della spesa pro-capite scritti nella colonna 5ª ma utilizza il valore che la CT ha ancora sul visore. Ad esempio la seconda riga è stata calcolata nel seguente modo:

– 9.42 [E] 11 [÷] 4.5 [E] [=]

– si è scritto nella 4ª colonna il numero (2.09333…E4) comparso sul visore

– [÷] 7.34 [E] 4 [×] 100 [=]

– si è scritto nell'ultima colonna l'arrotondamento del numero comparso sul visore

– si è scritto nella 5ª colonna l'arrotondamento del dato scritto nella 4ª.

e15 Rispetto alla prima metà del Novecento la quantità e la qualità dei beni alimentari che una persona consuma è sicuramente aumentata. Tuttavia dall'ultima colonna della tabella del quesito precedente o dai grafici di → figura 8 si vede che la porzione di stipendio spesa per l'alimentazione è diminuita. Ciò si spiega col fatto che oggi, mediamente, si guadagna molto più di allora anche in valore effettivo.

Se è vero che si possono fare molte più spese in generi non alimentari, occorre però osservare che queste spese spesso sono diventate "necessarie": sono aumentati i beni e i servizi che dobbiamo pagare per "*sopravvivere*". Ad esempio oggi quasi tutti devono impiegare dei mezzi di trasporto per raggiungere il posto di lavoro. Per essere aggiornati su ciò che succede, per conoscere nuove disposizioni di legge, per orientarsi nelle scelte politiche, …

dobbiamo leggere giornali, guardare la televisione, … mentre un tempo (con una società meno complessa, città più piccole, …) era più facile accedere diversamente alle informazioni. Per andare a scuola fino a 16, 19 o più anni dobbiamo acquistare libri, pagare tasse d'iscrizione, … mentre un tempo non c'erano gli attuali livelli di obbligo scolastico e i mestieri richiedevano titoli di studio più bassi. …

Del resto senza l'aumento dei redditi non vi sarebbe stato sviluppo produttivo: affinché i beni prodotti vengano venduti è necessario che le persone abbiano la possibilità economica di acquistarli.

Sai *trovare* altri beni e servizi che ora (ma non nella prima metà del Novecento) sono diventati "*di sussistenza*"?

e16 Nel periodo A le monete in circolazione di taglio più piccolo sono quelle da 5 e 10 centesimi di euro, nel periodo B sono 5 e 10 lire, nel periodo C quelle da 2 e 1 lira. Tre persone devono suddividersi in parti eguali 1000 unità monetarie (€ o L). Quale somma (in moneta circolante) spetterebbe a ciascuno nei tre periodi?

1000/3 = [sul visore della CT] ...
somma spettante se si è nel periodo A: ... se si è in B: ... se si è in C: ...

e17 Se invece le tre persone del quesito e16 devono formare 1000 unità monetarie contribuendo in parti eguali, qual è la somma in moneta circolante che ciascuno deve versare?

somma spettante se si è nel periodo A: ... se si è in B: ... se si è in C: ...

e18 Ecco il risultato di 20/3 ottenuto con tre CT differenti. Descrivi il comportamento di ciascuna delle tre CT usando i concetti introdotti nel §6.

(1) 6.6666666 (2) 6.6666667 (3) 6.666666666

e19 Un piccolo caseggiato è suddiviso in 6 appartamenti di diverse dimensioni, tre di 76 m^2 e tre di 69 m^2. Alcune spese comuni (coloritura dei muri esterni, cambiamento del portone, riparazione del tetto, …) vengono ripartite in proporzione alla diversa estensione degli appartamenti. Per facilitare i conteggi la superficie di ogni appartamento viene espressa in millesimi di caseggiato, cioè viene posta uguale a 1000 la superficie complessiva degli appartamenti e vengono calcolate in proporzione le "quote millesimali" corrispondenti ai diversi appartamenti.

Calcola la quota millesimale (arrotondata ai decimi) di ogni appartamento e spiega il procedimento che hai impiegato.

e20 Il prodotto W viene venduto a peso. Sonia compra del W spendendo 8.35 €. Tornata a casa, non ricordandosi del prezzo di W, pesa la quantità acquistata e trova che il suo peso è di circa 760 grammi («circa» poiché la bilancia di Sonia va di 5 grammi in 5 grammi; il peso esatto in grammi potrebbe essere 762 o 759 o …).

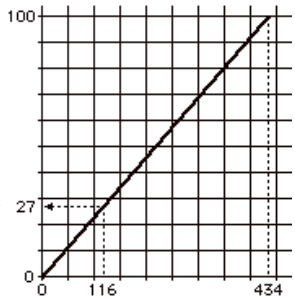
Quanto costa al chilogrammo W?

Al variare del peso il costo di W varia in proporzione: a peso doppio corrisponde doppio costo, e così via. Qual è il fattore di proporzionalità "peso (in kg) → costo (in €)"? Qual è il fattore di proporzionalità "peso (in g) → costo (in €)"?

e21 Impiegando un foglio di carta millimetrata trova l'ampiezza del settore con cui rappresentare l'incidenza della voce "alimentari" nel 1985 (➡ quesito 36) procedendo graficamente (➡ figura 7, riprodotta a fianco).

Sull'asse verticale invece delle percentuali rappresenta le ampiezze angolari; con 1 mm rappresenta 2° (quindi con 1 cm rappresenta 20°, con 18 cm 360°). Verifica se ottieni 96°.

Procedi analogamente per le altre voci e confronta i valori trovati con quelli che avevi ottenuto nel ➡ quesito 41.



e22 Luigi, in attesa dell'autobus all'uscita da scuola (in centro città), vuole fare un piccolo studio statistico: trovare quante persone viaggiano mediamente in un'automobile in un'ora di punta. Durante due successivi "rossi" di un semaforo vicino, annota su un foglio per ogni macchina ferma il numero dei passeggeri (compreso l'autista) che ha a bordo. Fa 28 annotazioni:

2	1	3	1	1	1	2	4	1	2	2	1	2	3
1	1	3	1	4	1	2	2	1	3	1	1	1	3

Qual è il numero medio di passeggeri rilevato da Luigi? Effettua il calcolo con la CT nei due seguenti modi:

(1) eseguendo direttamente:

$$\frac{2+1+3+1+1+\ldots+1+3}{28}$$

(2) contando il numero delle volte che compare 1 (sia N_1), il numero delle volte che compare 2 (sia N_2), il numero delle volte che compare 3 (sia N_3), il numero delle volte che compare 4 (sia N_4) e infine calcolando:

$$\frac{1\cdot N_1 + 2\cdot N_2 + 3\cdot N_3 + 4\cdot N_4}{28}$$

Quale dei due metodi hai trovato più conveniente? perché?

e23 Nel manuale d'uso per le CT prodotte dalla ditta ZZ si legge:

«Le calcolatrici ZZ sono predisposte anche per i calcoli statistici: per un insieme di numeri è possibile calcolare la loro media, la loro somma, …. Vediamo un esempio (in alcuni modelli il tasto per introdurre i dati è indicato con DATA invece che con Σ+):

OFF ON	*0*	Azzeramento generale
14	*14*	Battitura del 1° dato
Σ+	*n* = *1*	Sua introduzione (compare l'indicazione che è stato inserito 1 dato)
6	*6*	Battitura del 2° dato
Σ+	*n* = *2*	Sua introduzione (compare l'indicazione che i dati inseriti sono 2)
6	*6*	Battitura del 3° dato
Σ+	*n* = *3*	Sua introduzione (compare l'indicazione che i dati inseriti sono 3)
6	*6*	Battitura del 4° dato
Σ+	*n* = *4*	Sua introduzione (compare l'indicazione che i dati inseriti sono 4)
x̄	*n* = *8*	Compare la media aritmetica dei dati introdotti
Σ×	*32*	Compare la somma dei dati introdotti
n	*8*	Compare il numero dei dati introdotti

Nei modelli delle calcolatrici ZZ che sono dotati del tasto FRQ invece di battere tre volte il dato 6 si poteva procedere nel seguente modo:

14	*14*	Battitura del 1° dato
Σ+	*n* = *1*	Sua introduzione (compare l'indicazione che è stato inserito 1 dato)
6	*6*	Battitura del 2° dato
FRQ	*fr* = *00*	Scelta di assegnare al dato una frequenza (n° di volte per cui prenderlo)
3	*fr* = *03*	Battitura della frequenza
Σ+	*n* = *4*	Introduzione per 3 volte di 6 (compare l'indicazione che i dati inseriti sono 4)
x̄	*8*	Compare la media aritmetica dei dati introdotti »

Ricordiamo che nei tasti delle CT spesso si usa *x* per indicare il dato introdotto; ad esempio 1/x e −× indicano il calcolo del reciproco e il calcolo dell'opposto del numero visualizzato.

Analogamente Σ× e x̄ indicano il calcolo della somma e il calcolo della media della sequenza di dati introdotti. Il simbolo Σ è la lettera greca "sigma", che viene pronunciata come la nostra "esse"; qui viene usata per ricordare la parola "somma" Σ+ indica l'aggiunta di un nuovo dato alla sequenza di dati che devono essere sommati (e di cui deve essere calcolata la media); in alcune CT è presente anche Σ− per indicare la cancellazione dell'ultimo dato della sequenza (serve per correggere eventuali errori di battitura).

I calcoli statistici in genere appaiono come significati "secondari" di qualche tasto; ad esempio 2nd 4 . Alcune CT sono dotate di un apposito tasto, STAT o un tasto simile, che attiva il significato statistico dei tasti; questo permane fino a che non si ribatte STAT .

- Tra i due procedimenti esemplificati nel manuale d'uso quale corrisponde al procedimento (1) del quesito ➡ e22, quale al procedimento (2)?
- Quale conteggio viene automatizzato rispetto ai procedimenti senza impiego dei tasti statistici?
- Come potresti usare i tasti statistici per battere una sequenza di tasti alternativa a quella del ➡ quesito 54?
- Prova a usare il programma **R** (➡ §3), o un altro programma simile, per effettuare gli stessi calcoli esemplificati nei manuali delle due CT [nella finestra di input batti i dati su righe diverse; se un dato ha frequenza maggiore di uno metti una virgola e la frequenza subito dopo il dato; ogni volta che clicchi [I] vengono ricalcolate la media e il numero totale dei dati].

e24 Considera i seguenti procedimenti di calcolo, in particolare le parti indicate in corsivo:

(1) $45\cdot79\cdot100000+789\cdot26\cdot100000 \rightarrow (45\cdot79+789\cdot26)\cdot100000$

(per semplificare l'impostazione del calcolo sulla CT, riducendo il n° di tasti da battere)

(2) $45/17 - 12/17 \rightarrow (45-12)/17$

(per battere sulla CT un'unica divisione per 17)

(3) $15075/3 \rightarrow (15000+75)/3 \rightarrow 15000/3+75/3 \rightarrow 5000+25 \rightarrow 5025$

(nel calcolo mentale è più facile dividere per 3 separatamente 15000 e 75)

(4) $89\cdot4 \rightarrow (90-1)\cdot4 \rightarrow 90\cdot4-1\cdot4 \rightarrow 360-4 \rightarrow 356$

(nel calcolo mentale è più facile moltiplicare per 4 separatamente 90 e 1)

Nel caso (1) il nuovo termine è stato ottenuto estraendo il moltiplicatore che era comune ai termini di una addizione e mettendolo come fattore dell'intera somma:

moltiplico per 100000 il risultato della addizione 45·79+789·26
invece che i due addendi 45·79 e 789·26.

Nel caso (2) il nuovo termine è stato ottenuto estraendo il divisore che era comune ai termini di una sottrazione e mettendolo come fattore dell'intera differenza:

divido per 17 il risultato della sottrazione 45–12
invece che i due termini della sottrazione 45 e 12.

Possiamo riassumere entrambi i casi dicendo che il termine iniziale è stato *trasformato* estraendo il fattore (moltiplicatore o divisore) che era comune ai termini di una addizione o di una sottrazione e mettendolo come fattore dell'intera somma o differenza.

Questo tipo di trasformazione viene chiamato ***raccoglimento a fattore comune***.

Nelle trasformazioni evidenziate in corsivo nei casi (3) e (4) il nuovo termine è stato ottenuto distribuendo il fattore (moltiplicatore o divisore) di una somma (o una differenza) tra i diversi termini di essa:

– nel caso (3) divido per 3 gli addendi 15000 e 75 invece che il risultato dell'addizione;

– nel caso (4) moltiplico per 4 i termini della sottrazione 90 e 1 invece che 90–1.

Questo tipo di trasformazione viene chiamato ***distribuzione del fattore comune***.

Le due trasformazioni sono l'una l'inversa dell'altra, e possono essere sintetizzate con la stessa formula, che letta da sinistra a destra dà una trasformazione, letta da destra a sinistra dà l'altra.

- Per ottenere tale formula, *inserisci* nei riquadri sottostanti i simboli: **+ · ( )**
- *Scrivi* nella tabella i valori che assumono *a*, *b* e *c* nei casi considerati.

[tieni conto che, ad esempio, 45/17 può essere pensato come 45·(1/17) e 90–1 come 90+(–1)]

□ *a* □ *b* □□ *c* = *a* □ *c* □ *b* □ *c*

	a	*b*	*c*
(1)	45·79		100000
(2)		–12	
(3)			1/3
(4)	90		

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
posto di una cifra (dopo ques.8), *potenza* n-*esima* (tra ques.8 e ques.10), *notazione scientifica* (dopo ques.16), *ordine di grandezza* (dopo ques.16), *proporzionalità* (prima di ques.19), *percentuale* (prima di ques.22, dopo ques.24), *media aritmetica* (§5), *approssimazione per arrotondamento e troncamento* (prima di ques.26, dopo ques.58).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

Esempio di svolgimento parziale di quanto richiesto nel riquadro

1) Vedi le parti già evidenziate per le voci "posto di una cifra", "notazione scientifica", "ordine di grandezza", "potenza n-esima", nel ➡ paragrafo 1.

2) "posto di una cifra": «Nella misura 37.169 km la cifra di posto –3 rappresenta i metri»

"potenza n-esima": «L'area di una faccia di un cubo si ottiene elevando alla seconda la misura dello spigolo; il volume si ottiene invece elevandola alla terza»

3) In questa scheda abbiamo esaminato alcune statistiche di tipo economico e abbiamo visto alcuni strumenti matematici utili per rappresentare e analizzare dati.

Abbiamo considerato come è cambiato il modo di spendere i soldi per i vari tipi di beni e di servizi nel Novecento. Abbiamo visto come rappresentare numeri molto grandi e molto piccoli, a mano o con la calcolatrice, come confrontare numeri di diversa grandezza, …

[il riassunto deve proseguire riferendosi ai paragrafi successivi]