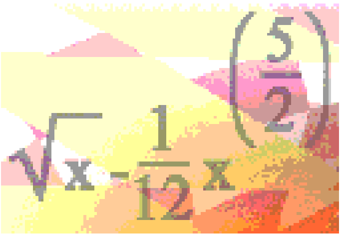
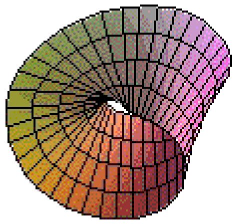
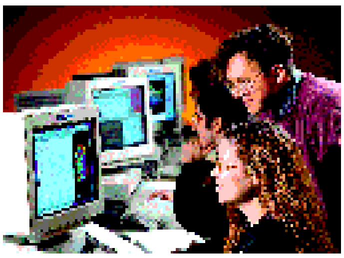
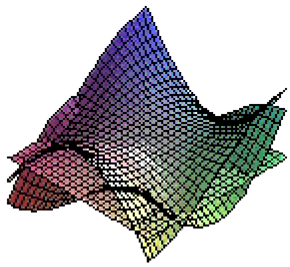
GIANNI BETTINI





ALCUNI SEMPLICI ESEMPI DI ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1 RISOLTI CON MAPLE V





A Isabella

INDICE

Durante il primo semestre dell'Anno Accademico 1998-99 del Diploma di Laurea in Ingegneria Meccanica dell'Università degli Studi di Firenze il corso di Analisi Matematica 1 è stato oggetto del tentativo di avvicinarsi all'Analisi Matematica utilizzando un approccio "ibrido" che ai teoremi e alle nozioni classiche abbinasse l'uso del calcolatore, ormai irrinunciabile strumento quotidiano di lavoro.

Il presente libretto riunisce alcuni semplici esempi di questo tipo di approccio, realizzati con il programma di calcolo formale MapleV® Release 4 - Student Edition. Proprio per questo tentativo di conciliare le tecniche tradizionali con la facilità di calcolo di un elaboratore, gli esempi proposti potranno sembrare (e non è detto che non lo siano!) risolti in maniera artificiosa e tortuosa mentre una via più diretta appare evidente.

Desidero ringraziare tutti gli studenti del Corso per il piacevole rapporto instauratosi e la costruttiva collaborazione a questa mia prima esperienza di codocenza; il Prof. Giovanni Frosali, titolare del Corso, e il futuro collega Mauro Baroni per l'aiuto e i frequenti, benché immeritati, attestati di stima; un ringraziamento anche all'Ing. Isabella Villani (mia compagna di vita), che mi sopporta da quando studiavamo insieme Analisi 2 e che anche in questo caso ho stressato per avere giudizi e suggerimenti; una menzione particolare merita infine il Prof. Pietro Zecca, con il quale ho sostenuto gli esami di Analisi Matematica 1, Analisi Matematica 2 e Metodi Matematici per l'Ingegneria: tutta la mia ignoranza in materia è esclusivamente colpa sua.

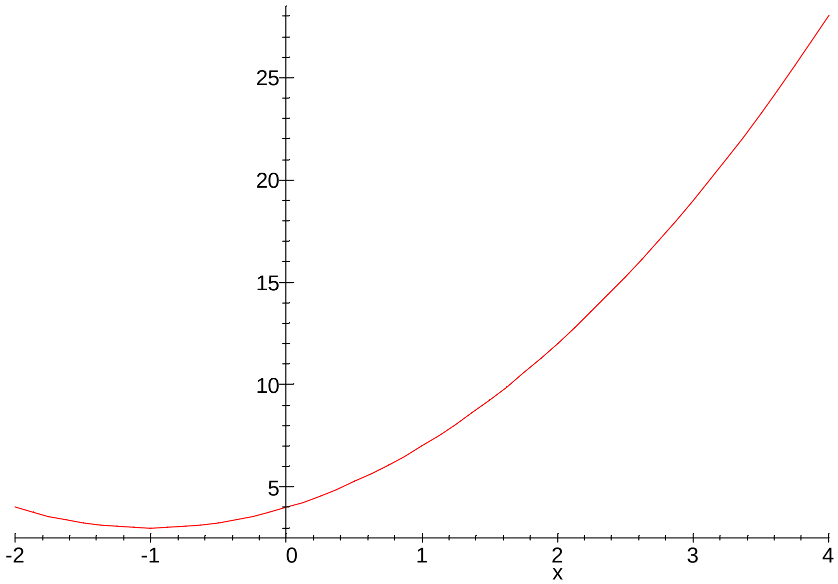
Spero che questo libretto possa aiutare altri studenti ad avere un rapporto meno conflittuale con l'Analisi Matematica.

Gianni Bettini

Esempio 1.1

Supponiamo di voler calcolare $a = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

```
STUDENT > f1 := (x^3-8)/(x-2)
STUDENT > subs(x=2,f1);
Error, division by zero
STUDENT > plot(f1,x=-2...4);
```




```
STUDENT > subs(x=2,f1);
Error, division by zero
STUDENT > simplify(f1);
```

$$x^2 + 2\,x + 4$$

STUDENT > $\lim_{x \to 2} f1$

$$12$$

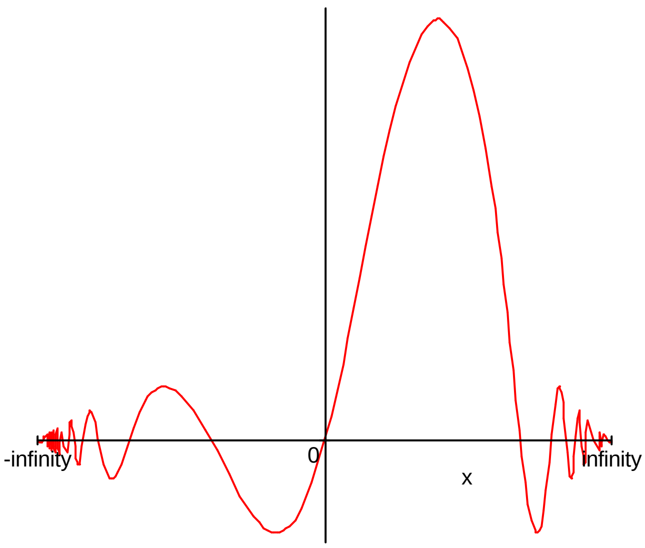
```
STUDENT >
```

Esempio 1.2

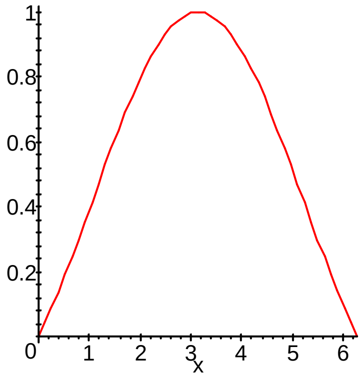
Supponiamo di voler calcolare $a = \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x^3)}{x - \pi}$

STUDENT > $f2 := \frac{\sin(x)}{\pi - x}$

STUDENT > `plot(f2,x=-infinity...infinity);`



STUDENT > `plot(f2,x=0...2*Pi);`



STUDENT > `subs(x=Pi,f2);`

`Error, division by zero`

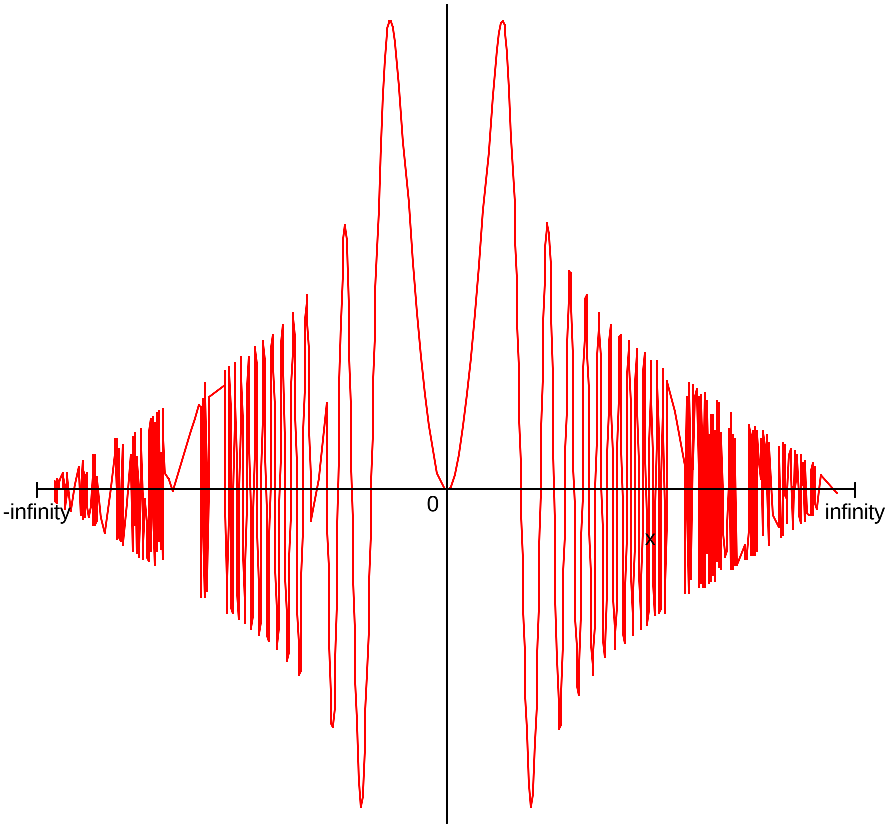
STUDENT > $\lim_{x \to (2\pi)} f2$

$$0$$

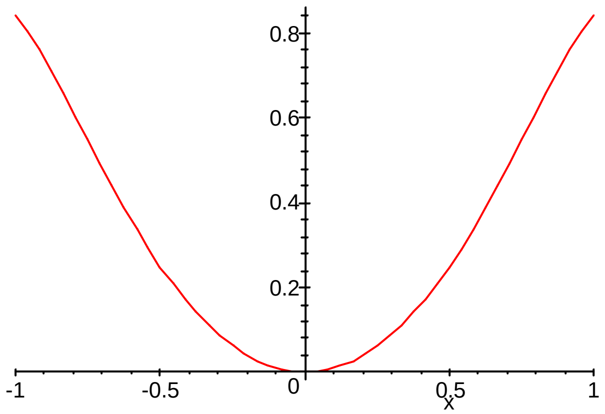
Esempio 1.3

Supponiamo di voler calcolare $a = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^3)}{x}$

```
STUDENT >  f:=(sin(x^3))/x:
STUDENT > plot(f,x=-infinity...infinity);
```




```
STUDENT > plot(f,x=-1...1);
```



Vediamo la f come una frazione ed andiamo ad analizzare il comportamento del numeratore e del denominatore:

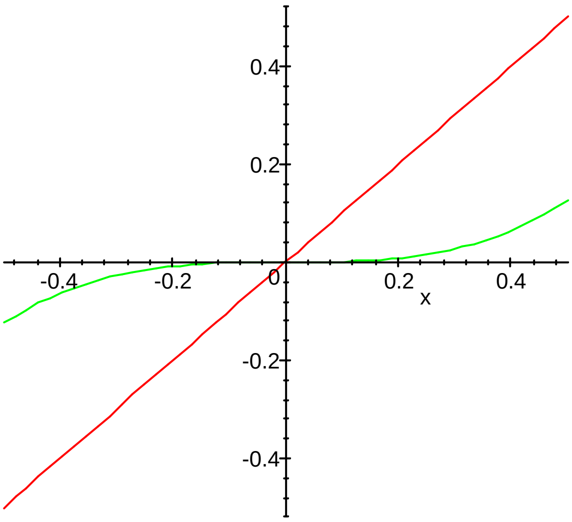
```
STUDENT > fn:=numer(f);
```

$$fn := \sin(x^3)$$

```
STUDENT > fd:=denom(f);
```

$$fd := x$$

```
STUDENT > plot([fd,fn],x=-1/2...1/2);
```

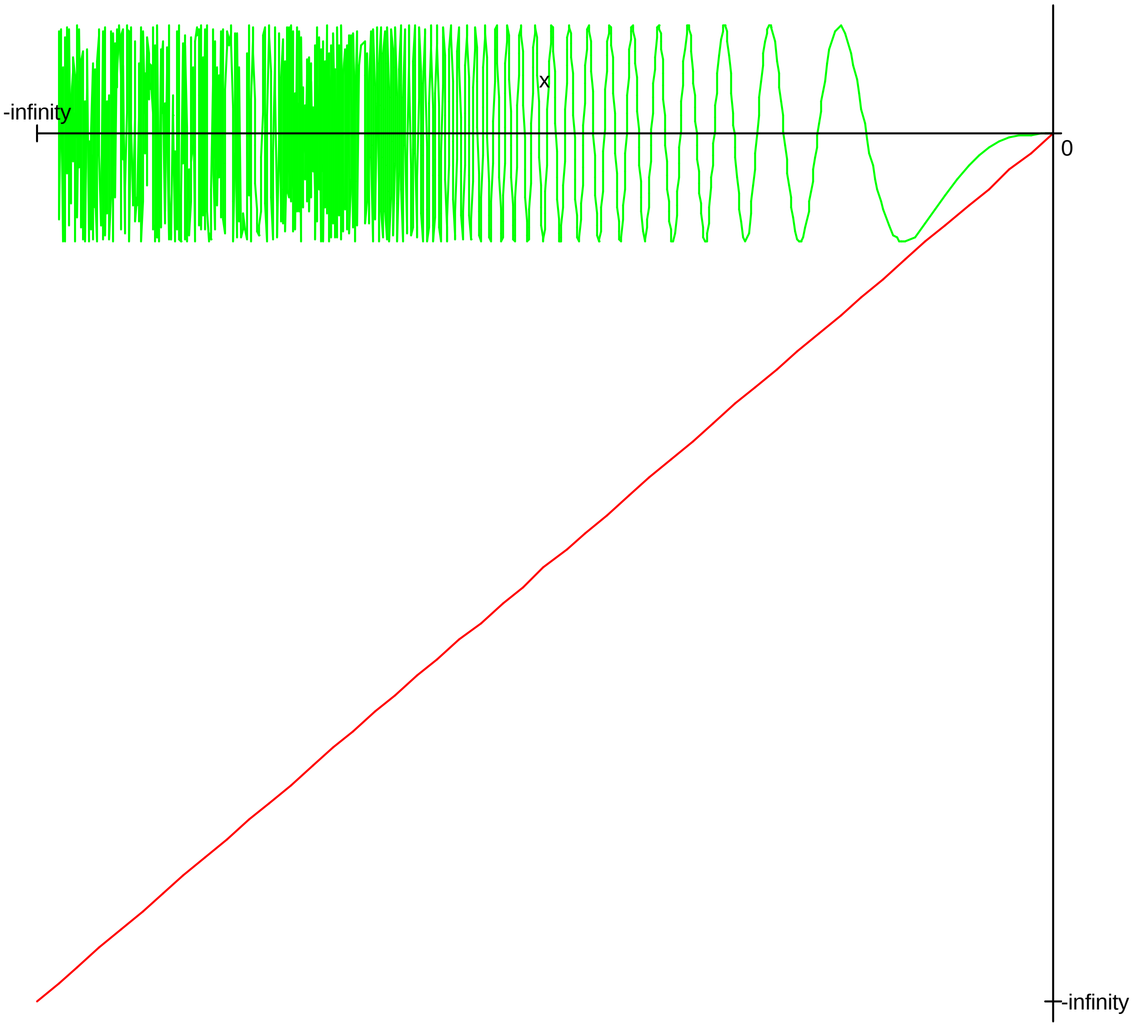



```
STUDENT > limit((sin(x^3))/x,x=0);
```

$$0$$

limiti all'infinito

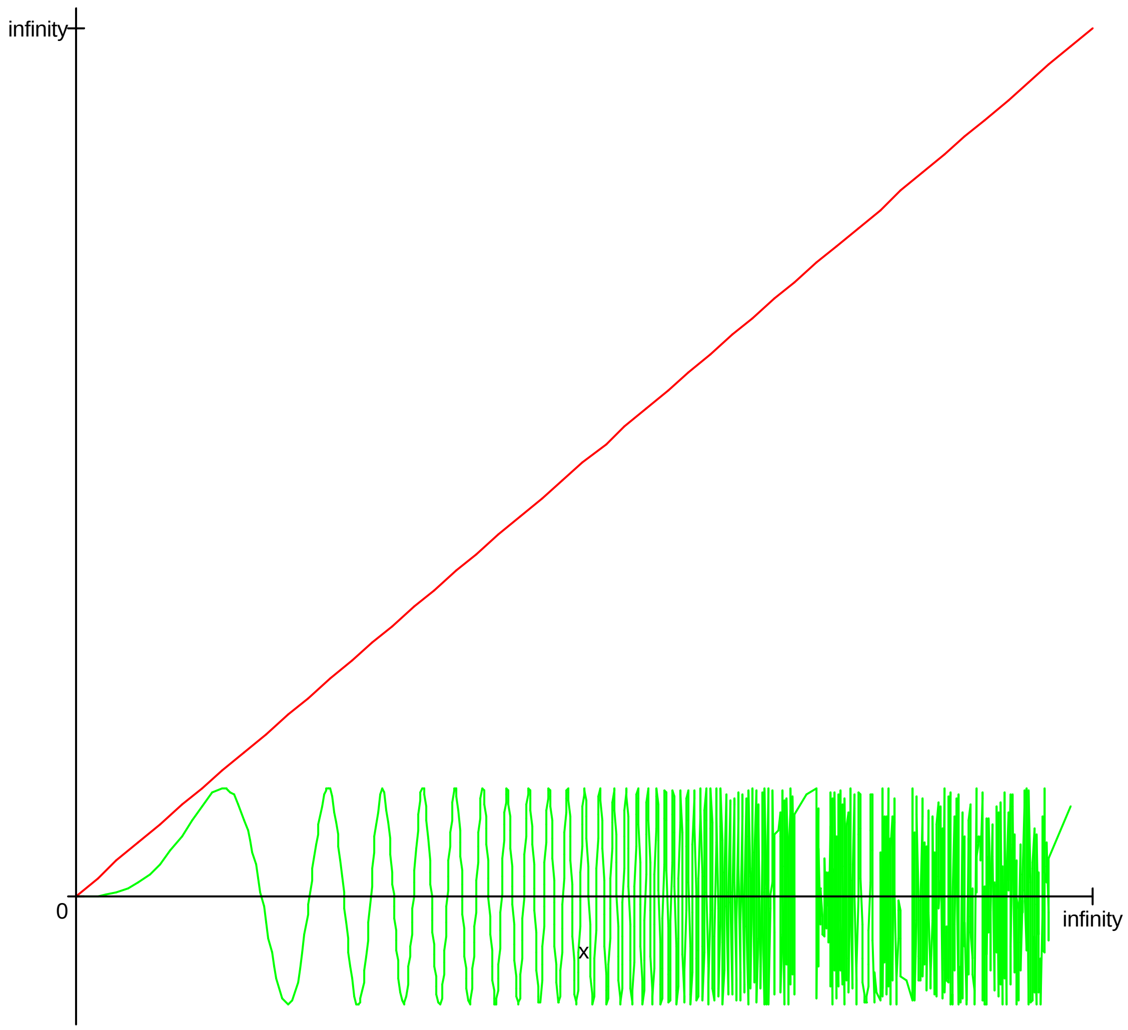
```
STUDENT > plot([fd,fn],x=-infinity...0);
```




```
STUDENT > limit((sin(x^3))/x,x=-infinity);
```

$$0$$

```
STUDENT > plot([fd,fn],x=0...+infinity);
```



STUDENT > `limit((sin(x^3))/x,x=+infinity);`

$$0$$

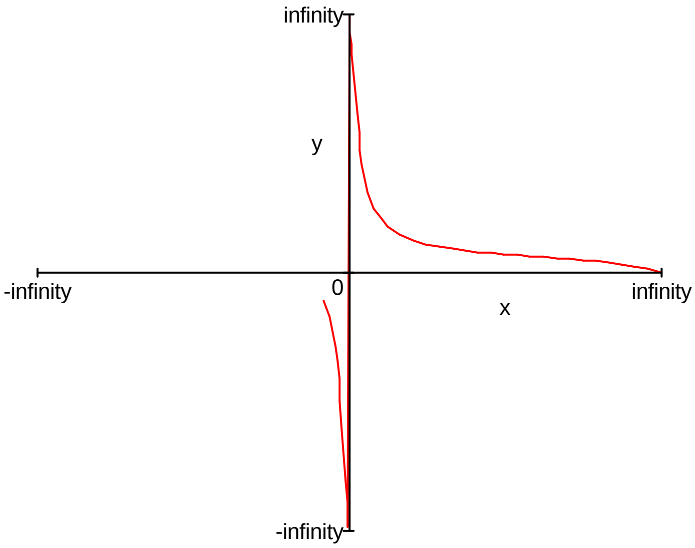
STUDENT >

Esempio 1.4

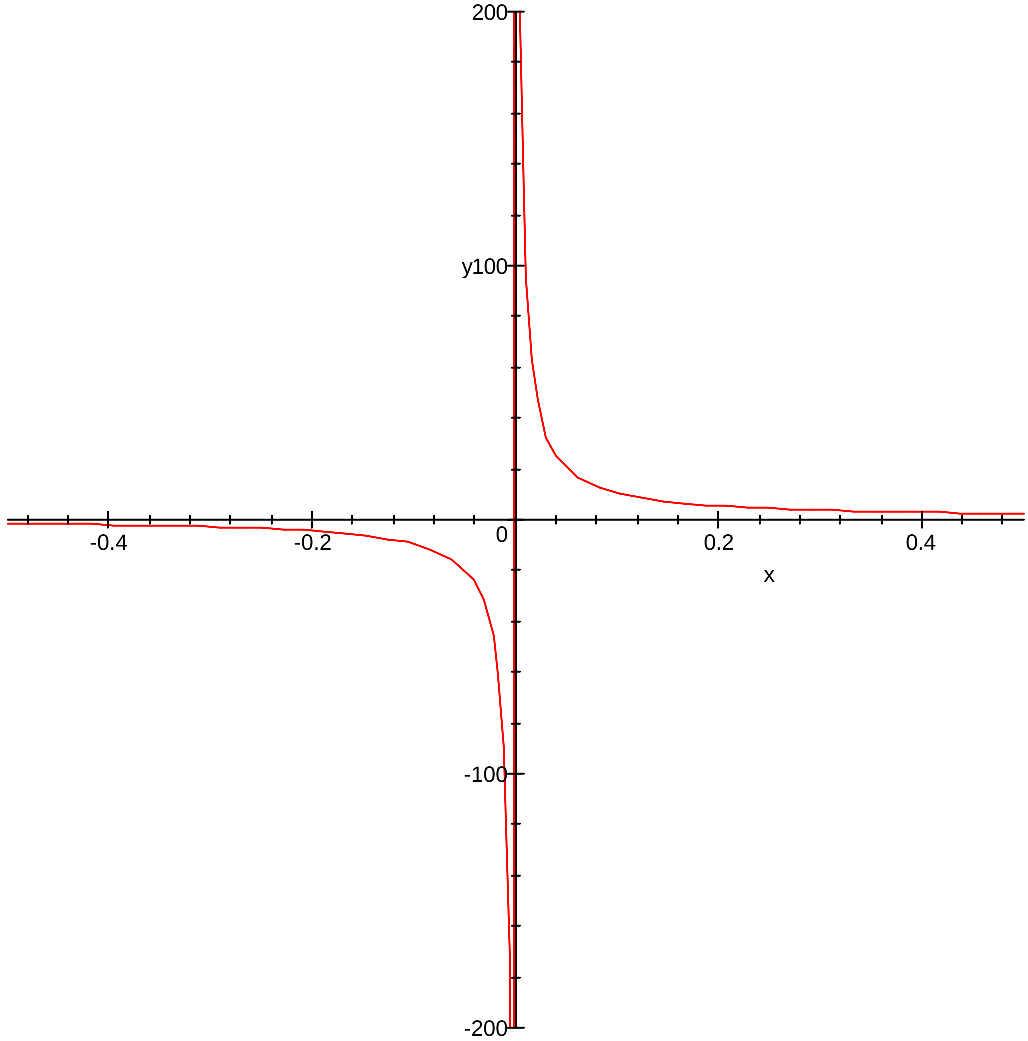
Supponiamo di voler calcolare $a = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

```
STUDENT > f4:=sqrt(x+1)/x:
```

```
STUDENT > plot(f4,x=-infinity...infinity,y=-infinity...infinity
          );
```



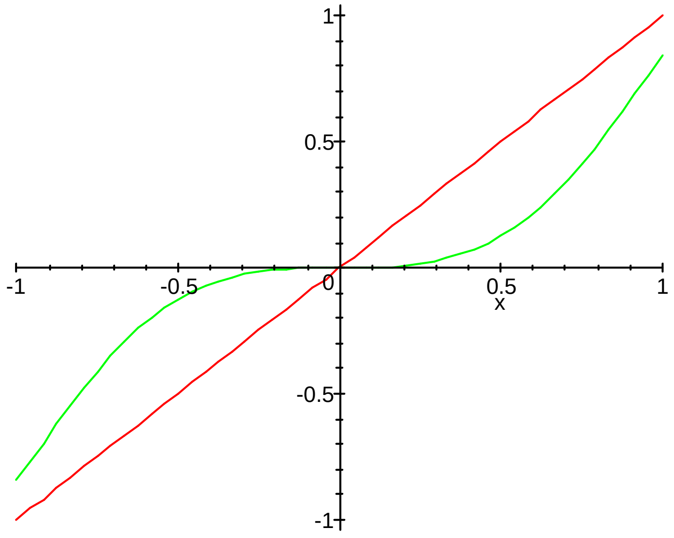

```
STUDENT > plot(f4,x=-1/2...1/2,y=-200...200);
```




```
STUDENT > f4n:=numer(f);
STUDENT > f4d:=denom(f);
STUDENT > plot([f4d,f4n],x=-1...1);
```

$$f4n := \sin(x^3)$$

$$f4d := x$$




```
STUDENT > limit(f4n,x=0);
```

$$0$$

```
STUDENT > limit(f4d,x=0);
```

$$0$$

```
STUDENT > limit(f4,x=0,left);
```

$$-\infty$$

```
STUDENT > limit(f4,x=0,right);
```

$$\infty$$

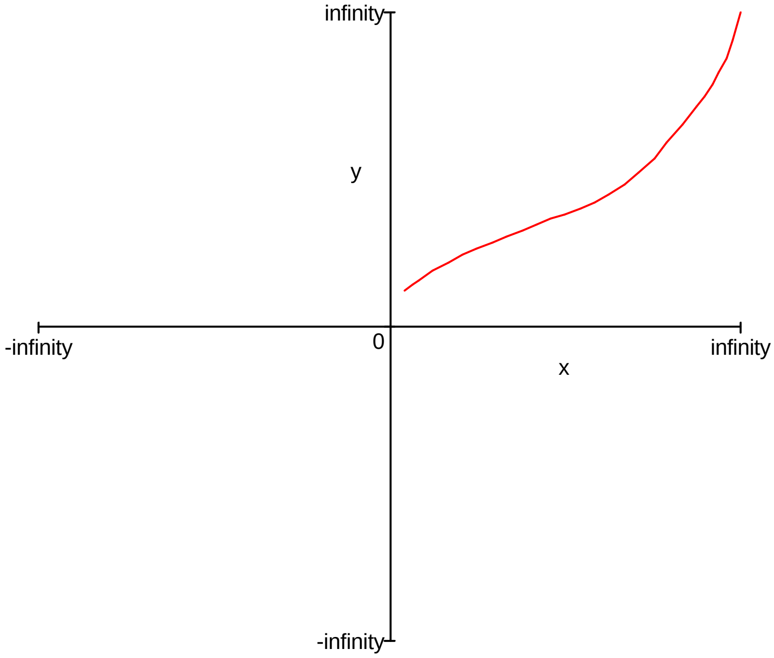
```
STUDENT >
```

Esempio 1.5

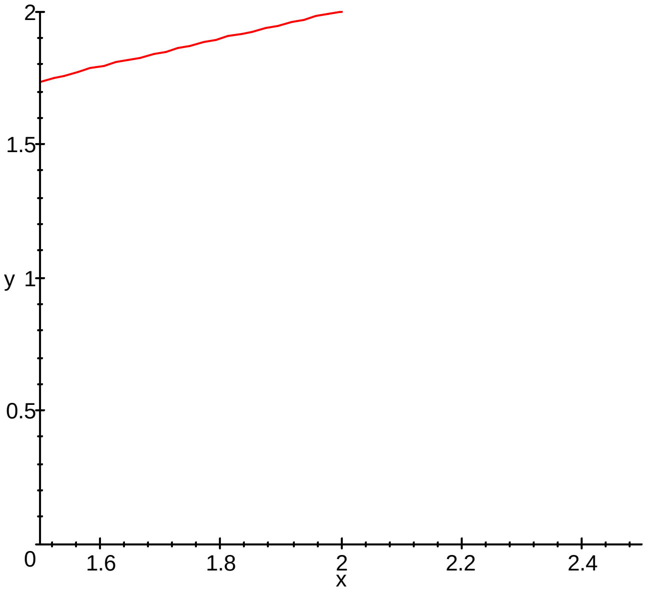
Supponiamo di voler calcolare $a = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\log(x) - \log(2)}$

```
STUDENT > f5:=(2-x)/(log(2)-log(x)):
```

```
STUDENT > plot(f5,x=-infinity...infinity,y=-infinity...infinity
          );
```




```
STUDENT > plot(f5,x=3/2...5/2,y=0...2);
```




```
STUDENT > subs(x=2,f5);
```

Error, division by zero

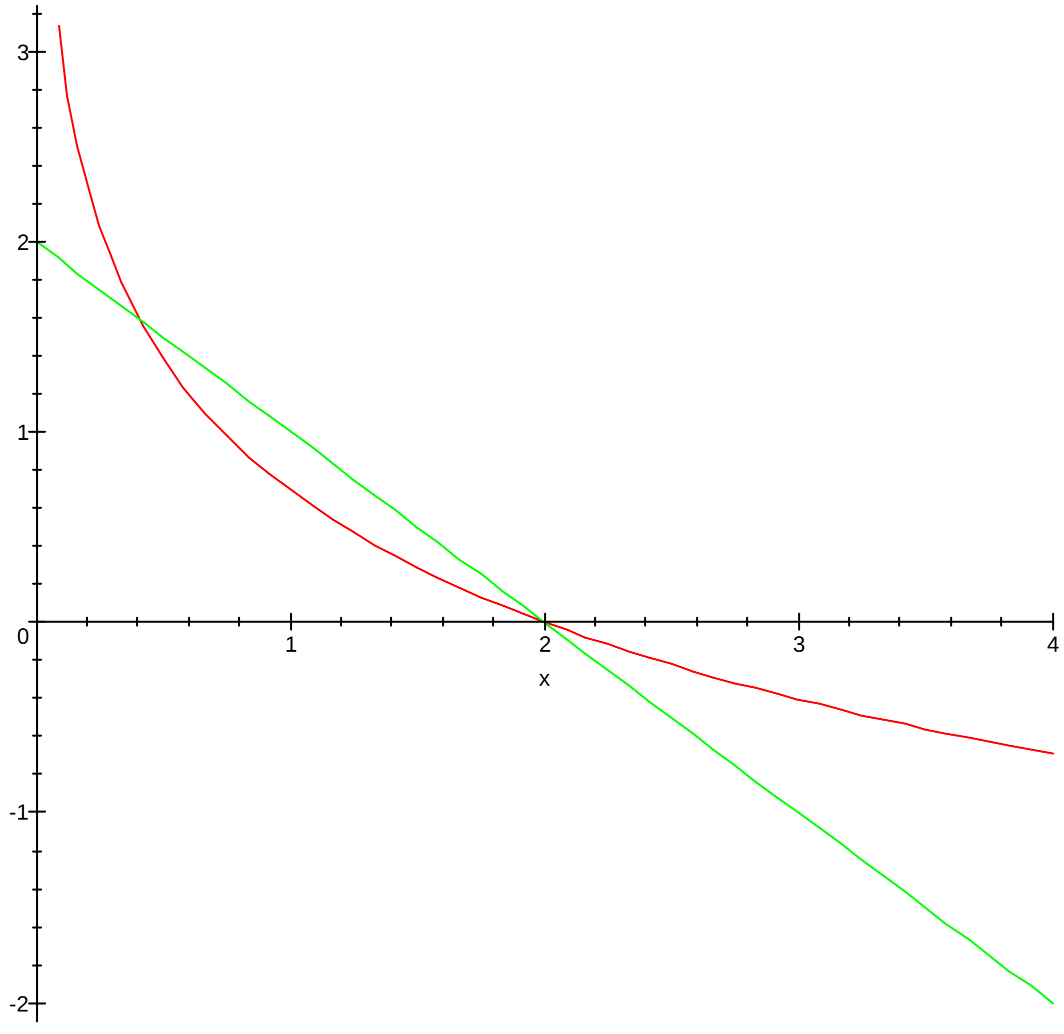
```
STUDENT > f5n:=numer(f5);
```

$$f5n := 2 - x$$

```
STUDENT > f5d:=denom(f5);
```

$$f5d := \ln(2) - \ln(x)$$

```
STUDENT > plot([f5d,f5n],x=0...4);
```




```
STUDENT > limit(f5n,x=2);
```

$$0$$

```
STUDENT > limit(f5d,x=2);
```

$$0$$

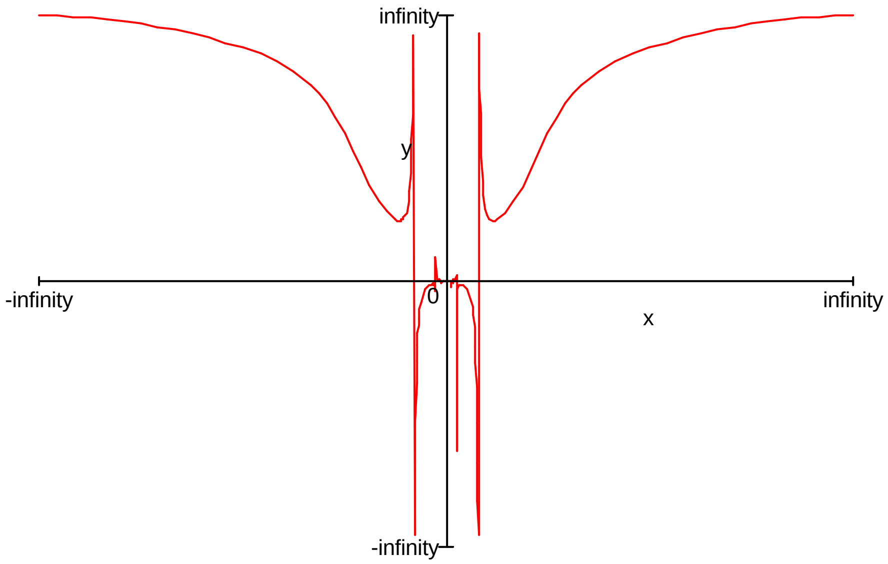
```
STUDENT > limit(f5,x=2);
```

$$2$$

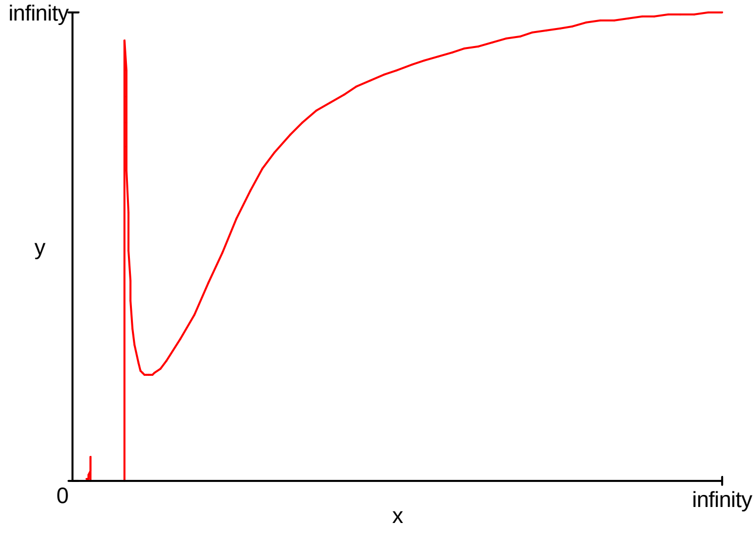
Esempio 1.6

Supponiamo di voler calcolare $a = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$

```
STUDENT > f6:=(x^2)/cos(1/x):
STUDENT > plot(f6,x=-infinity...infinity,y=-infinity...infinity
          );
```




```
STUDENT > plot(f6,x=0...infinity,y=0...infinity);
```




```
STUDENT > subs(x=infinity,f6);
```

$$\frac{\infty}{\cos\left(\frac{1}{\infty}\right)}$$

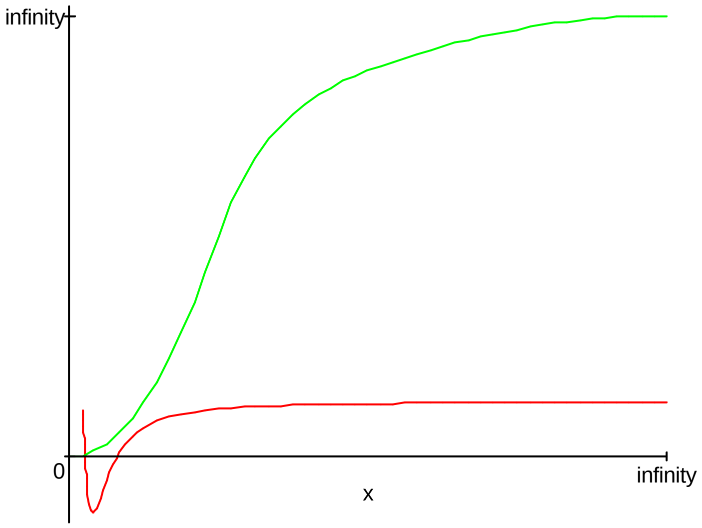
```
STUDENT > f6n:=numer(f6);
```

$$f6n := x^2$$

```
STUDENT > f6d:=denom(f6);
```

$$f6d := \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

```
STUDENT > plot([f6d,f6n],x=0...infinity);
```



STUDENT > $\lim_{x \to \infty} f6n$

$$\infty$$

STUDENT > $\lim_{x \to \infty} f6d$

$$1$$

STUDENT > $\lim_{x \to \infty} f6$

$$\infty$$

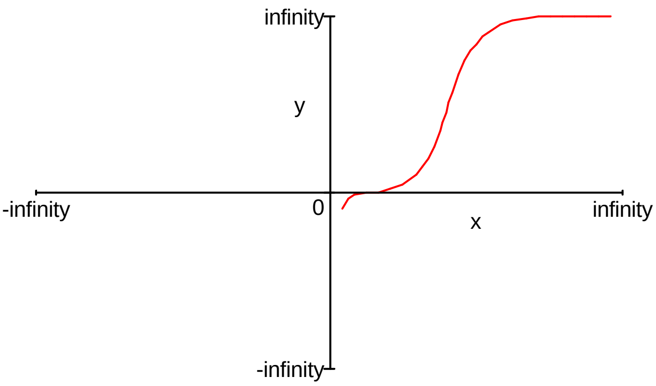
```
STUDENT >
```

Esempio 1.7

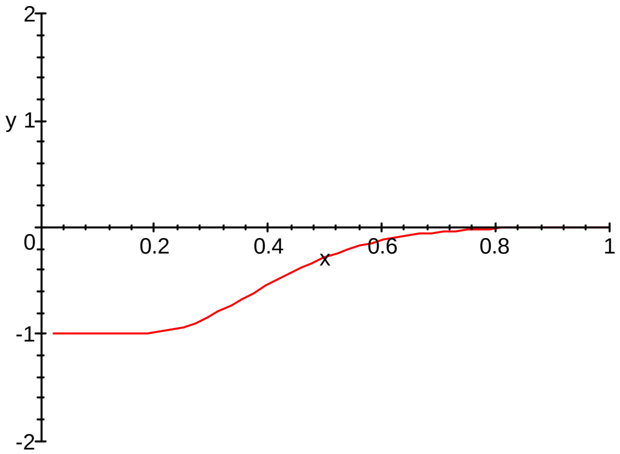
Supponiamo di voler calcolare $a = \lim_{x \to 0} x^{(\ln(x)^2)} - 1$

STUDENT > $f7 := x^{(\ln(x)^2)} - 1$

```
STUDENT > plot(f7,x=-infinity...infinity,y=-infinity...infinity);
```




```
STUDENT > plot(f7,x=0...1,y=-2...2);
```




```
STUDENT > subs(x=0,f7);
```

$$-1$$

STUDENT >

Esempio 2.1

Calcolo di limiti utilizzando il polinomio di Taylor

Consideriamo il seguente limite: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \mathbf{e}^x}{x}$

```
STUDENT > f:=((cos(x)-exp(x))/x);
```

$$f := \frac{\cos(x) - \mathbf{e}^x}{x}$$

che ha come valore

STUDENT > $\lim_{x \to 0} f$

$$-1$$

A tale risultato si può pervenire considerando la f(x) come composizione delle funzioni

STUDENT > $b := \mathbf{e}^x$

STUDENT > $c := \cos(x)$

STUDENT > $z := x$

Sviluppando tali funzioni elementari con il polinomio di Taylor

```
STUDENT > d:=taylor(b,x=0,2);
```

$$d := 1 + x + O(x^2)$$

```
STUDENT > e:=taylor(c,x=0,2);
```

$$e := 1 + O(x^2)$$

Sostituendo nella f(x) alle funzioni elementari la loro approssimazione con il polinomio di Taylor in modo da non avere più forme indeterminate

```
STUDENT > g:=subs(b=d,c=e,a);
```

$$g := -1$$

risultato al quale si poteva pervenire anche con il trucco seguente:

STUDENT > $a := \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \mathbf{e}^x}{x}$

STUDENT > $a := \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1 + 1 - \mathbf{e}^x}{x}$

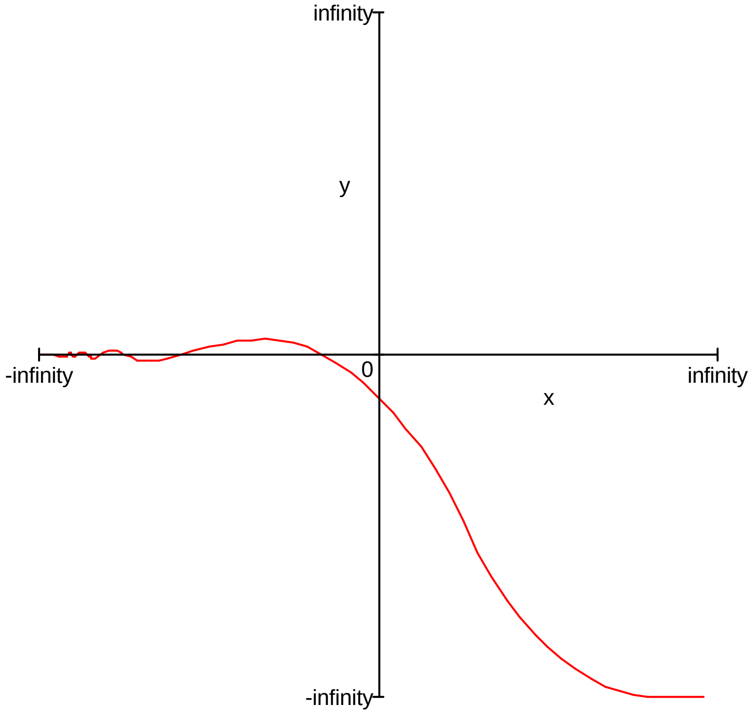
STUDENT > $a := \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} + \frac{1 - \mathbf{e}^x}{x}$

STUDENT > $a := 0 - 1$

$$a := -1$$

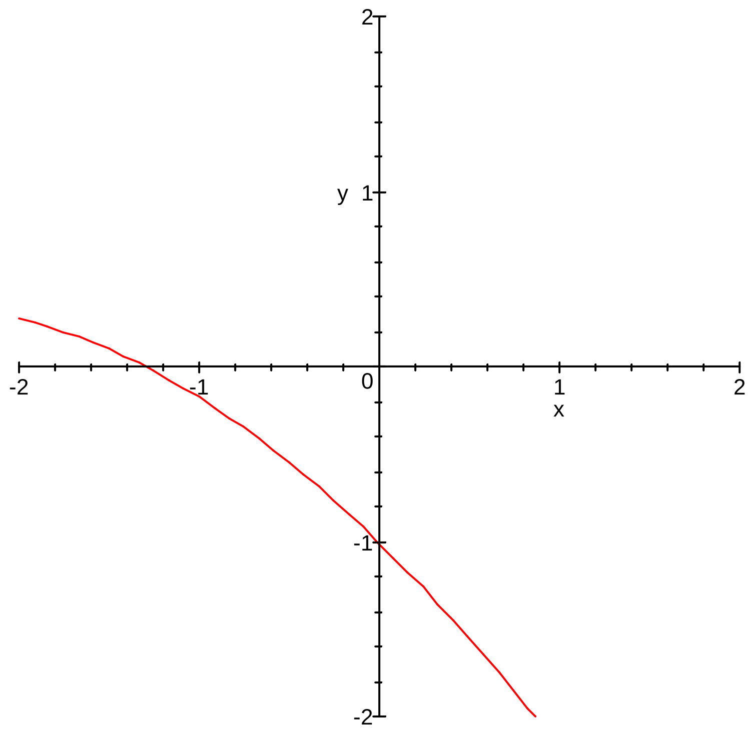
verifichiamo graficando la funzione:

```
STUDENT > plot(f,x=-infinity...infinity,y=-infinity...infinity)
;
```



Restringiamo il campo di osservazione ad un intorno di x=0

STUDENT > plot(f, $x = -2 .. 2$, $y = -2 .. 2$)



ed abbiamo la conferma della bontà del risultato ottenuto.

Esempio 2.2

Calcolo di limiti utilizzando il polinomio di Taylor

Cosideriamo il limite $\lim_{x \to 0} \frac{x \log(1+x) - \tan(x)^2}{x^3 + x^2 - \sin(x^2)}$ che ha come valore

```
STUDENT > f:=(((x*log(1+x))-(tan(x))^2)/(x^3+x^2-sin(x^2)));
```

$$f := \frac{x \ln(1+x) - \tan(x)^2}{x^3 + x^2 - \sin(x^2)}$$

```
STUDENT > a:=limit(f,x=0);
```

$$a := \frac{-1}{2}$$

Consideriamo $f(x) := \frac{x \log(1+x) - \tan(x)^2}{x^3 + x^2 - \sin(x^2)}$ come composizione delle seguenti funzioni

STUDENT > $b1 := \log(x+1)$

STUDENT > $b2 := \tan(x)$

STUDENT > $b3 := \sin(x)$

che posso sviluppare con il polinomio di Taylor

```
STUDENT > c1:=taylor(b1,x=0,3);
```

$$c1 := x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$$

```
STUDENT > c2:=taylor(b2,x=0,2);
```

$$c2 := x + O(x^2)$$

```
STUDENT > c3:=taylor(b3,x=0,2);
```

$$c3 := x + O(x^2)$$

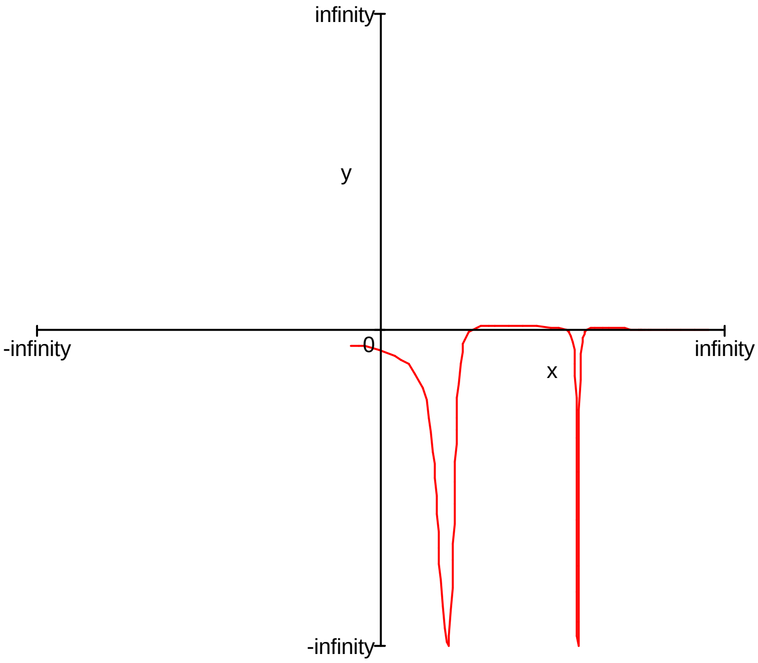
e poi ricombinare per ottenere lo sviluppo in serie della f(x) e calcolare il limite. Il polinomio approssimante la f(x) non presenta più il problema dell'indeterminazione

```
STUDENT > g:=subs(b1=c1,b2=c2,b3=c3,a);
```

$$g := \frac{-1}{2}$$

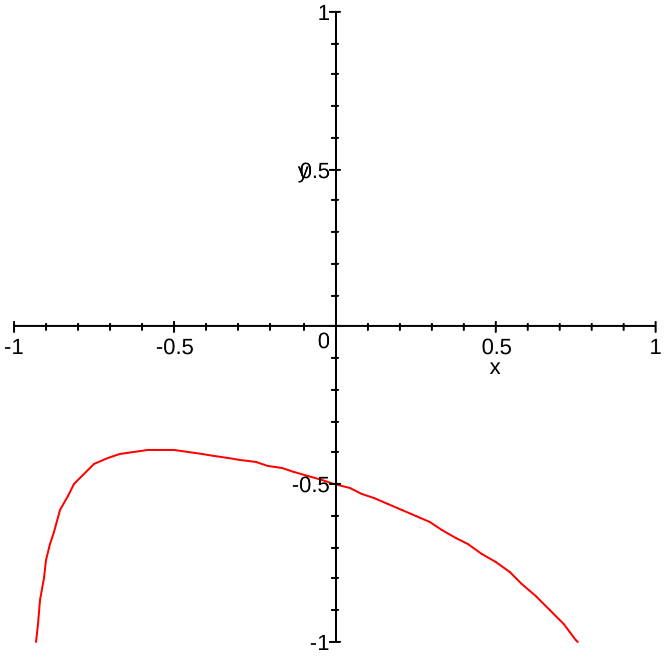
verifichiamo graficando la funzione:

```
STUDENT > plot(f,x=-infinity...infinity,y=-infinity...infinity)
          ;
```



Restringiamo il campo di osservazione ad un intorno di x=0

STUDENT > `plot(f,x=-1...1,y=-1...1);`



STUDENT >

Esempio 2.3

Calcolo di limiti utilizzando il polinomio di Taylor

Consideriamo la funzione

STUDENT > $f1 := \dfrac{(\sqrt{1-\sin(x)}-\cos(x))\sin(x)}{(\sqrt{1-\tan(x)}-\cos(x))\log(x+1)}$

$$f1 := \frac{(\sqrt{1-\sin(x)}-\cos(x))\sin(x)}{(\sqrt{1-\tan(x)}-\cos(x))\ln(1+x)}$$

Della quale si vuole trovare il valore per x=0. Tale punto non appartiene al dominio della f(x) come si può verificare sostituendo tale valore:

```
STUDENT > b:=subs(x=0,f1);
```

$$b := \frac{(\sqrt{1-\sin(0)}-\cos(0))\sin(0)}{(\sqrt{1-\tan(0)}-\cos(0))\ln(1)}$$

```
STUDENT > simplify(b);
Error, division by zero
```

Andiamo allora a valutare

STUDENT > $c := \lim_{x \to 0} f1$

$$c := 1$$

Consideriamo $f1 := \dfrac{(\sqrt{1-\sin(x)}-\cos(x))\sin(x)}{(\sqrt{1-\tan(x)}-\cos(x))\log(x+1)}$ come composizione delle seguenti funzioni

STUDENT > $d1 := \sqrt{1-\sin(x)}$

STUDENT > $e1 := \sqrt{1-\tan(x)}$

STUDENT > $g1 := \cos(x)$

che sviluppo come polinomio di Taylor e sostituisco (manualmente) nell'espressione della f1(x). Il limite non da più luogo ad una forma indeterminata

```
STUDENT > d:=taylor(sqrt(1-sin(x)),x=0,4);
```

$$d := 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + O(x^4)$$

```
STUDENT > e:=taylor(sqrt(1-tan(x)),x=0,4);
```

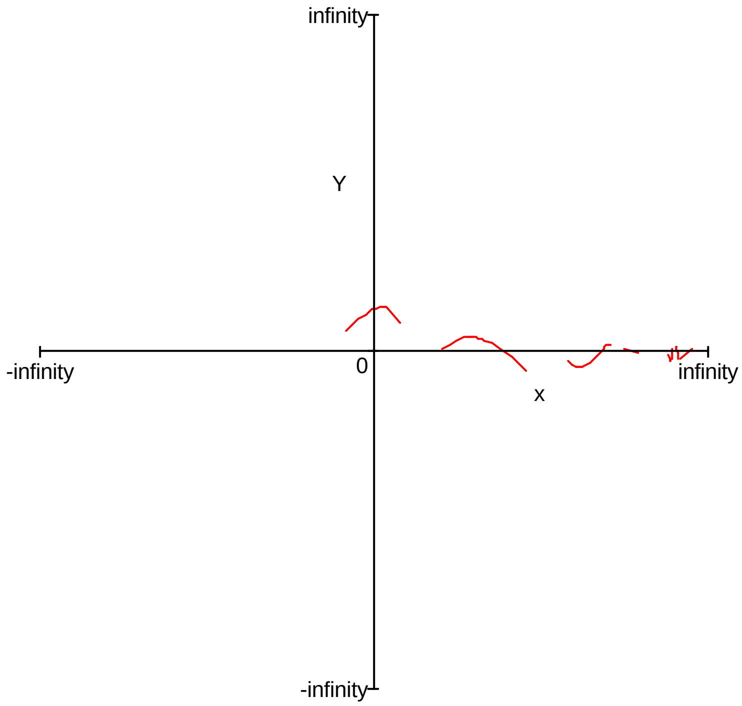
$$e := 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3 + O(x^4)$$

```
STUDENT > g:=taylor(cos(x),x=0,4);
```

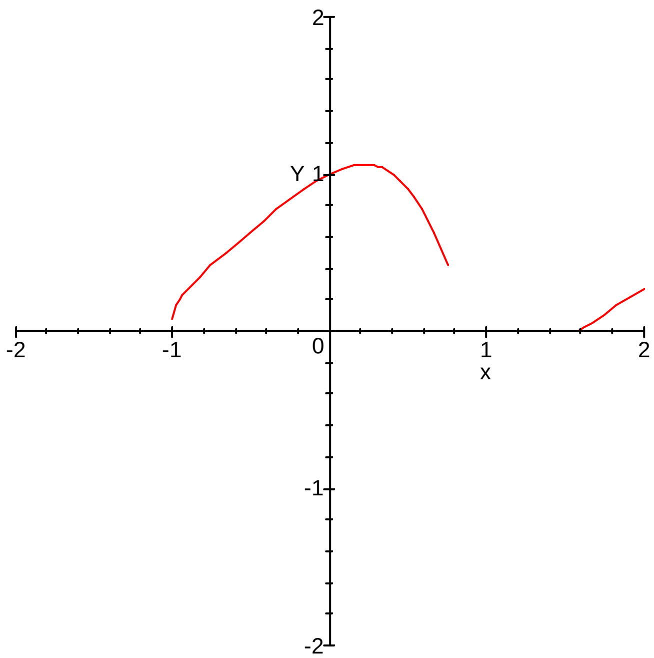
$$g := 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$$

Verifichiamo graficamente

```
STUDENT > plot(f1,x=-infinity...infinity,Y=-infinity...infinity
);
```



STUDENT > plot(f1,x=-2...2,Y=-2...2);
STUDENT >



STUDENT >

Esempio 2.4

Calcolo di limiti utilizzando il polinomio di Taylor

Consideriamo la funzione $f := \frac{x^7 \sqrt{x^4 + 4x^5} + (x+2)^3 (x^2 - \sin(x^2))}{\sin(4x^6)}$ della quale si vuole calcolare il limite per x->0

```
STUDENT > f:=(((x^7)*(sqrt(x^4+4*x^5))+((x+2)^3)*(x^2-sin(x^2))
          )/sin(4*x^6));
```

$$f := \frac{x^7 \sqrt{x^4 + 4x^5} + (x+2)^3 (x^2 - \sin(x^2))}{\sin(4x^6)}$$

```
STUDENT > a:=limit(f,x=0);
```

$$a := \frac{1}{3}$$

Consideriamo f(x) come composizione delle seguenti funzioni

STUDENT > $b1 := \sqrt{x^4 + 4x^5}$

STUDENT > $b2 := \sin(4x^6)$

STUDENT > $b3 := \sin(x^2)$

Che sviluppo con il polinomio di Taylor

STUDENT > $c1 := \mathrm{taylor}(b1, x = 0, 3)$

$$c1 := x^2 + O(x^3)$$

STUDENT > $c2 := \mathrm{taylor}(b2, x = 0, 9)$

$$c2 := 4x^6 + O(x^9)$$

STUDENT > $c3 := \mathrm{taylor}(b3, x = 0, 9)$

$$c3 := x^2 - \frac{1}{6}x^6 + O(x^9)$$

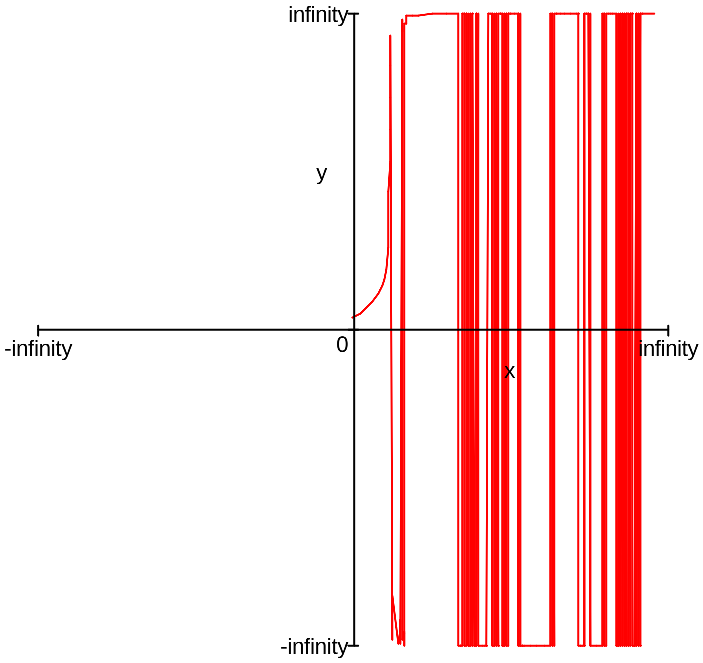
E sostituisco nell'espressione della f(x)

```
STUDENT > g:=subs(b1=c1,b2=c2,b3=c3,a);
```

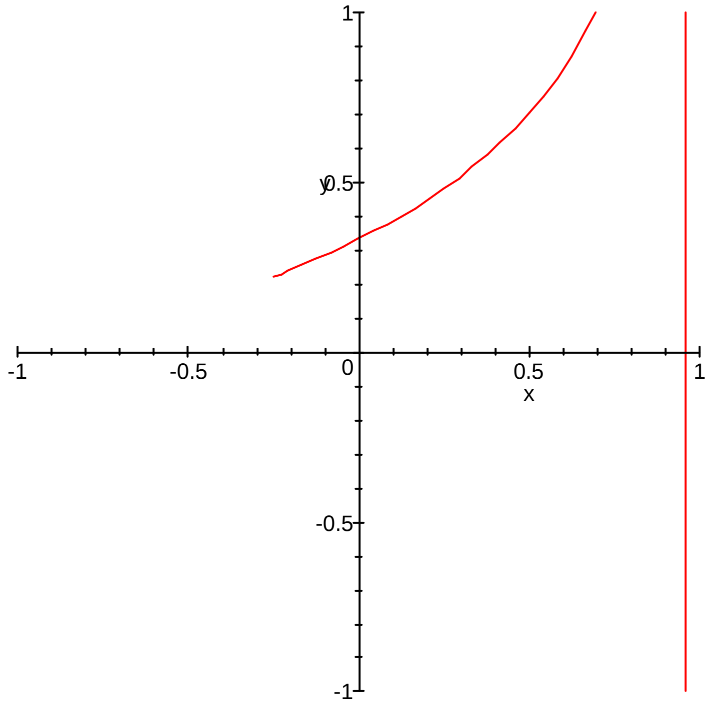
$$g := \frac{1}{3}$$

verifichiamo graficando la funzione:

```
STUDENT > plot(f,x=-infinity...infinity,y=-infinity...infinity)
          ;
```




```
STUDENT > plot(f,x=-1...1,y=-1...1);
```




```
STUDENT >
```

Esercizio 3.1

Studio di funzione parametrica

Determinare per quali valori del parametro a reale la funzione $f := x^3 - 2\,x + a\,\mathrm{arctg}(x)$

1) è invertibile su tutto R

2) ha un max o un min relativo per x=0

```
STUDENT > assume(x,real);
STUDENT > f := x^3-2*x+a*arctan(x);
```

$$f := x\sim^3 - 2\,x\sim + a\,\arctan(x\sim)$$

1) Se la funzione è monotona è invertibile. calcolo la derivata e impongo che non cambi segno:

```
STUDENT > f1:=diff(f,x);
```

$$f1 := 3\,x\sim^2 - 2 + \frac{a}{1 + x\sim^2}$$

```
STUDENT > solve(f1>0);
```

$$\{2 - x\sim^2 - 3\,x\sim^4 < a\}$$

Tale condizione sarà assicurata se `max(2-x^2-3*x^4)<a:`

```
STUDENT > maximize(2-x^2-3*x^4);
```

$$2$$

2) Data la continuità della funzione per ottenere tale situazione è sufficiente che si realizzino realizzare le seguenti condizioni:

a) la derivata prima si azzeri in x=0

b) la derivata seconda sia diversa da zero in x=0

```
STUDENT > g1:=subs(x=0,f1);
```

$$g1 := -2 + a$$

```
STUDENT > solve(g1=0,a);
```

$$2$$

```
STUDENT > f2:=diff(f1,x);
```

$$f2 := 6\,x\sim - 2\,\frac{a\,x\sim}{(1 + x\sim^2)^2}$$

```
STUDENT > subs(x=0,a=2,f2);
```

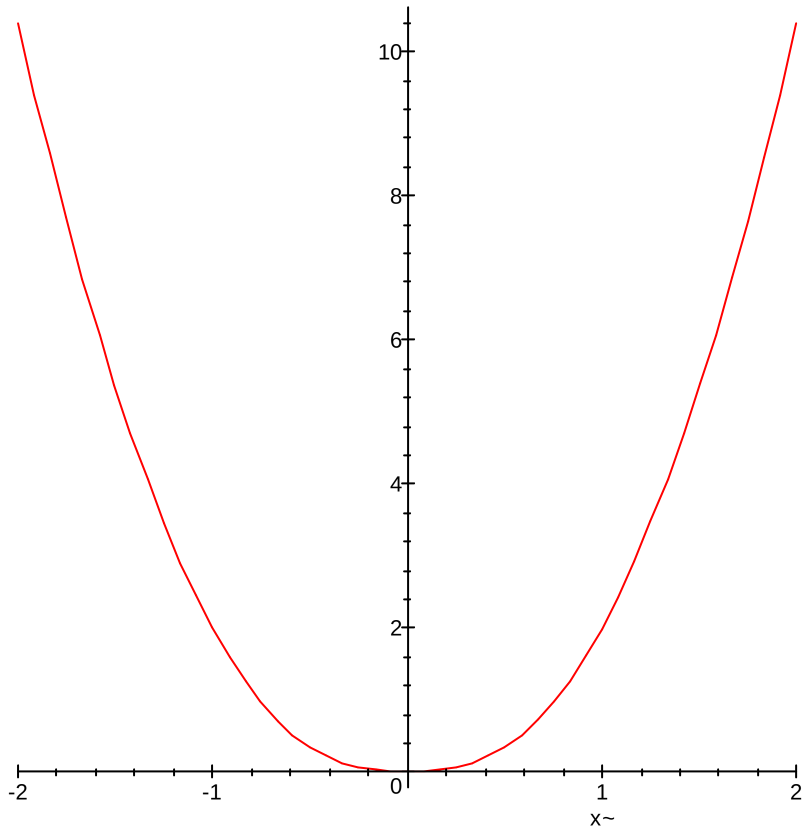
$$0$$

La condizione b) non si realizza, ma non possiamo asserire che non si tratta sicuramente di un Max o di un min (dovremo indagare le derivate successive di ordine pari). Per indagare sulle caratteristiche della f nel punto x=0 plottiamo la f nel caso di a=2

```
STUDENT > h1:=subs(a=2,f1);
```

$$h1 := 3\,x\sim^2 - 2 + \frac{2}{1 + x\sim^2}$$

```
STUDENT > plot(h1,x=-2...2);
```



dunque non è possibile ottenere un max o un min in x=0 ma solo un flesso.

Esempio 3.2

Studio di funzione parametrica

Studiamo il comportamento della seguente funzione dipendente dal parametro a

```
STUDENT > f:=(1+x)^a-(1+a*x);
```

$$f := (1+x)^a - 1 - a\,x$$

con il parametro a reale e diverso da 0 e da 1.

Studiamo prima il dominio

```
STUDENT > solve(1+x>0);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-1), \infty)$$

indaghiamo sul comportamento della f agli estremi del dominio per $x \to -1$e per $x \to \infty$

```
STUDENT > l1:=limit(f,x=-1,right);
```

$$l1 := \lim_{x \to (-1)+} (1+x)^a - 1 - a\,x$$

Dobbiamo a questo punto fare delle distinzioni su a:

1) se **a>0 -> l1=a-1**

2) se **a<0 -> l1=+infinity**

per esempio prendiamo

1) a=2

```
STUDENT > subs(a=2,l1);
```

$$\lim_{x \to (-1)+} (1+x)^2 - 1 - 2\,x$$

```
STUDENT > simplify(");
```

$$1$$

2) a=-1

```
STUDENT > subs(a=-2,l1);
```

$$\lim_{x \to (-1)+} \frac{1}{(1+x)^2} - 1 + 2\,x$$

```
STUDENT > simplify(");
```

$$\infty$$

Vediamo adesso il limite per $x \to \infty$

```
STUDENT > l2:=limit(f,x=+infinity);
```

$$l2 := \lim_{x \to \infty} (1+x)^a - 1 - a\,x$$

Dobbiamo nuovamente distinguere in base ad a:

1) se **a<0 -> l2=+infinity**

2) se **0<a<1 -> l2=-infinity**

3) se **a>1 -> l2=+infinity**

Per esempio

1) a=-2

```
STUDENT > subs(a=-2,l2);
```

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(1+x)^2} - 1 + 2\,x$$

```
STUDENT > simplify(");
```

$$\infty$$

2) a=1/2

```
STUDENT > subs(a=1/2,l2);
```

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x$$

```
STUDENT > simplify(");
```

$$-\infty$$

3) a=2

```
STUDENT > subs(a=2,l2);
```

$$\lim_{x \to \infty} (1+x)^2 - 1 - 2x$$

```
STUDENT > simplify(");
```

$$\infty$$

Troviamo dove la f interseca l'asse delle x (banalmente si nota per x=0).
Calcoliamo la derivata:

```
STUDENT > f1:=diff(f,x);
```

$$f1 := \frac{(1+x)^a a}{1+x} - a$$

```
STUDENT > f1:=collect(",a);
```

$$f1 := \left(\frac{(1+x)^a}{1+x} - 1\right)a$$

```
STUDENT > solve(f1=0,x);
```

$$0$$

A questo punto dobbiamo indagare se per x=0 abbiamo un Max oppure un min.
Proviamo a vedere la derivata seconda:

```
STUDENT > f2:=diff(f1,x);
```

$$f2 := \left(\frac{(1+x)^a a}{(1+x)^2} - \frac{(1+x)^a}{(1+x)^2}\right)a$$

```
STUDENT > simplify(");
```

$$(1+x)^{(a-2)}(a-1)a$$

```
STUDENT > f20:=subs(x=0,");
```

$$f20 := (a-1)a$$

```
STUDENT > solve(f20>0,a);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(0)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1), \infty)$$

```
STUDENT > solve(f20<0,a);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(0), \mathrm{Open}(1))$$

dunque abbiamo
1) se **a<0 -> (0,0) è un max**
2) se **0<a<1 -> (0,0) è un min**
3) se **a>1 -> (0,0) è un max**

Vediamo se ci sono asintoti all'infinito

```
STUDENT > 
```
$$\lim_{x \to \infty} f1$$

Tale limite vale:

1) -a per a<1,

2) +infinity per a>1

per esempio

```
STUDENT > subs(a=1/2,");
```
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2}$$

```
STUDENT > simplify(");
```
$$\frac{-1}{2}$$

In tal caso dovremo avere anche che esiste finito:

```
STUDENT > limit(f+a*x,x=infinity);
```
$$\lim_{x \to \infty} (1+x)^a - 1$$

Limite che vale -1 nel caso di a<0. Dunque nel caso di a<0 la f si comporta come

```
STUDENT > r1:=-a+x-1;
```
$$r1 := -a + x - 1$$

Distinguimo i tre casi:

1) **a<0 per esempio a=-2**

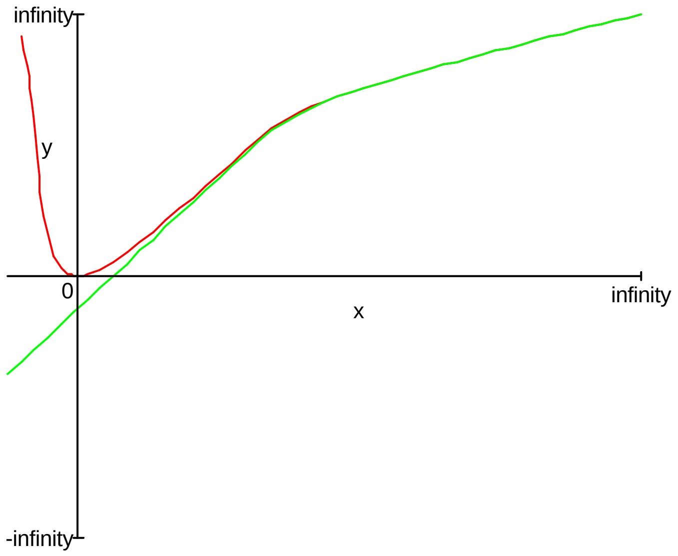
2) **0<a<1 per esempio a=1/2**

3) **a>1 per esempio a=2**

```
STUDENT > f:=(1+x)^a-(1+a*x);
```
$$f := (1+x)^a - 1 - a\,x$$

```
STUDENT > g:=subs(a=-2,f);
```
$$g := \frac{1}{(1+x)^2} - 1 + 2\,x$$

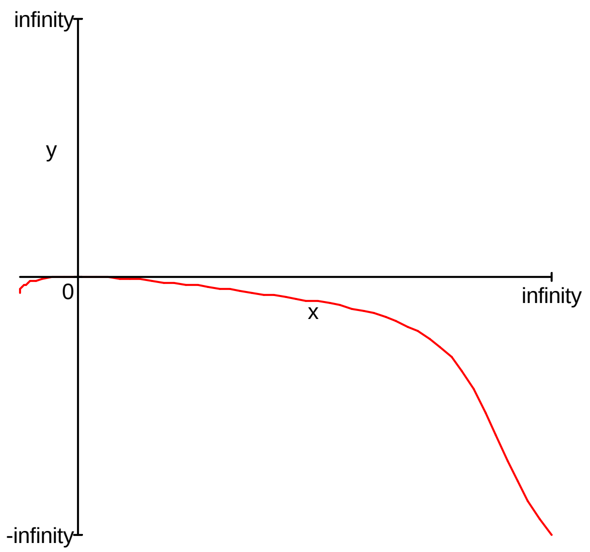
```
STUDENT > plot([g,2*x-1],x=-1..infinity,y=-infinity..infinity);
```




```
STUDENT > g1:=subs(a=1/2,f);
```

$$g1 := \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x$$

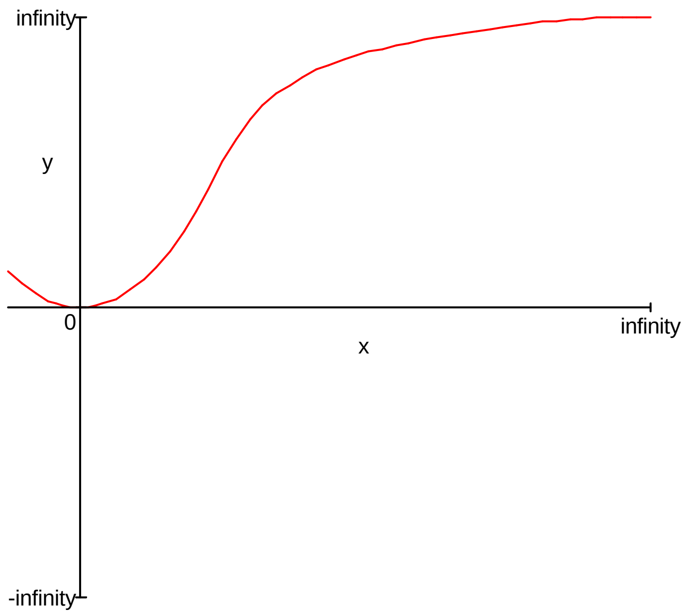
```
STUDENT > plot(g1,x=-1..infinity,y=-infinity..infinity);
```




```
STUDENT > g1:=subs(a=2,f);
```

$$g1 := (1+x)^2 - 1 - 2x$$

```
STUDENT > plot(g1,x=-1..infinity,y=-infinity..infinity);
```



STUDENT >

Esempio 3.3

Studio di funzione parametrica utilizzando le funzioni di animazione

Consideriamo la seguente funzione al variare del parametro t

```
STUDENT > f:=(1+x)^t-(1+t*x);
```

$$f := (1+x)^t - 1 - t\,x$$

con t reale e diverso da 0 e da 1.

Studiamo prima il dominio

```
STUDENT > solve(1+x>0);
```

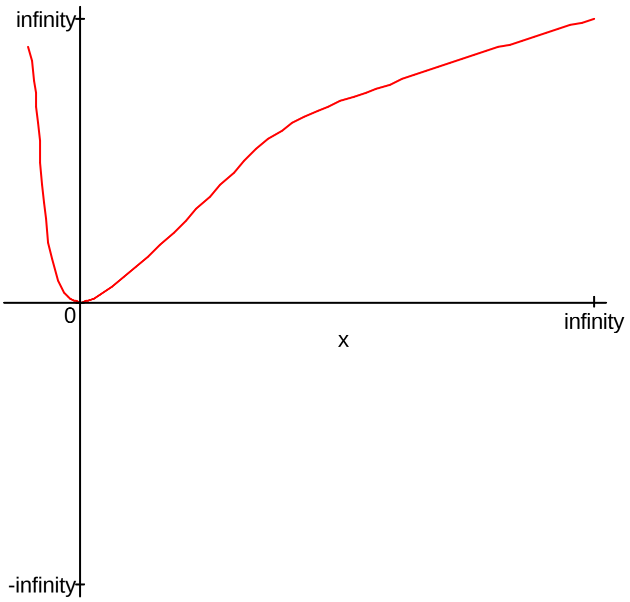
$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-1), \infty)$$

Attiviamo le funzioni di animazione

```
STUDENT > with(plots):
```

e proviamo una prima animazione visualizzando il comportamento della f al variare di t da -2 a 2

```
STUDENT > animate(f,x=-1...infinity,t=-2...2,frames=50);
```



Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio

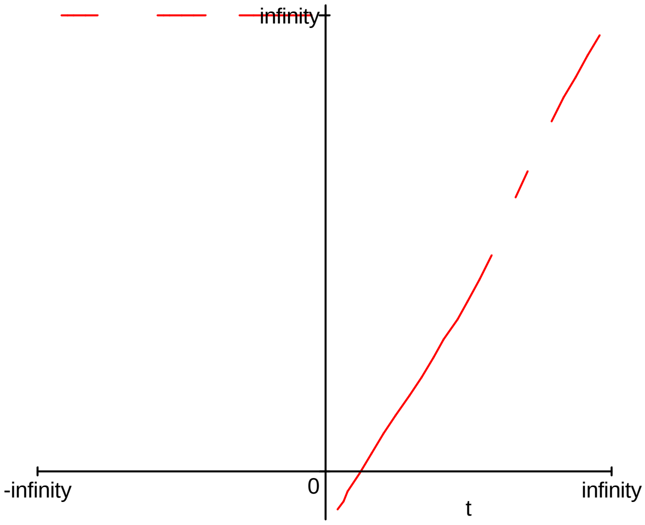
STUDENT > $l1 := \lim_{x \to (-1)+} f$

STUDENT > $l2 := \lim_{x \to \infty} f$

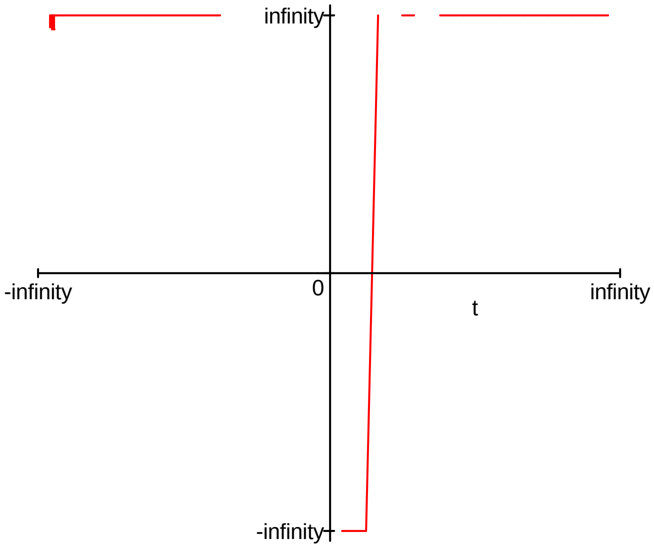
$$l2 := \lim_{x \to \infty} (1+x)^t - 1 - t\,x$$

Posso vedere l1e l2 come una funzioni di t e plottare il loro comportamento

```
STUDENT > plot(l1,t=-infinity...infinity);
```



STUDENT > **plot(l2,t=-infinity...infinity);**



Posso dunque fare le seguenti considerazioni

1) $l1 := \lim_{x \to (-1)+} f$ vale

1.1) ∞ per $t < 0$

1.2) un numero finito per $0 < t$

2) $l2 := \lim_{x \to \infty} f$ vale

2.1) -∞ per $t < 0$

2.2) ∞ per $0 < t < 1$

2.3) -∞ per $1 < t$

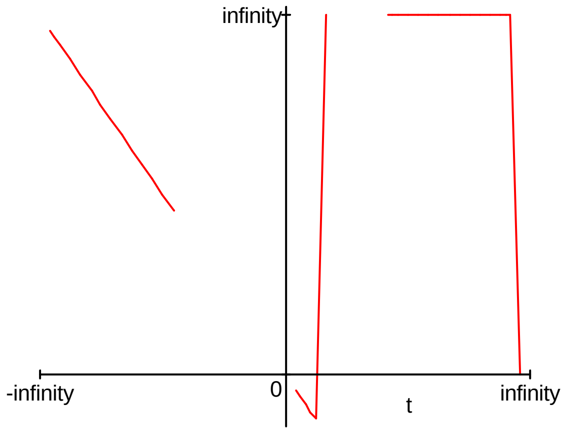
$$l2 := \lim_{x \to \infty} (1+x)^t - 1 - t\,x$$

Nel caso di l2 cerco l'esistenza di asintoti all'infinito usando lo stesso trucco utilizzato in precedenza

```
STUDENT > m:=limit(f/x,x=infinity);
```

$$m := \lim_{x \to \infty} \frac{(1+x)^t - 1 - t\,x}{x}$$

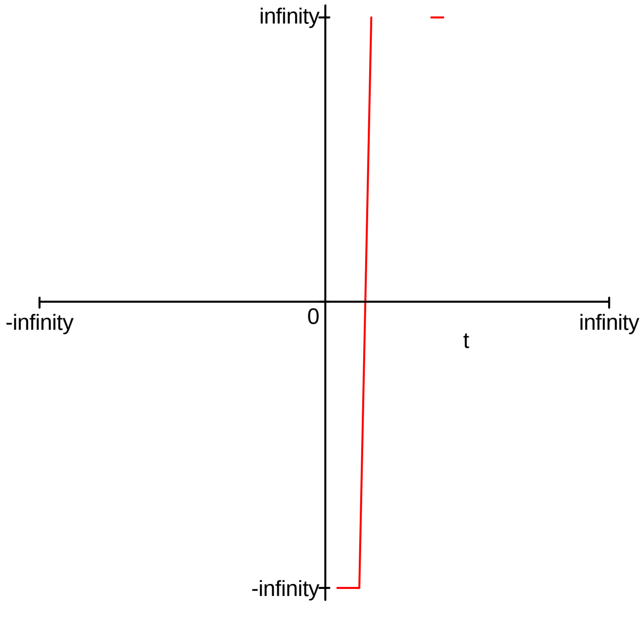
```
STUDENT > plot(m,t=-infinity...infinity);
```




```
STUDENT > q:=limit(f-m,x=infinity);
```

$$q := \lim_{x \to \infty} (1+x)^t - 1 - t\,x - \left(\lim_{x \to \infty} \frac{(1+x)^t - 1 - t\,x}{x} \right)$$

```
STUDENT > plot(q,t=-infinity...infinity);
```



Esiste un asintoto obliquo all'infinito solo per 0<t<1 ed ha equazione $y = -tx - 1$

Plottiamo la f in 3 casi

a) t=-2

b) t=1/2

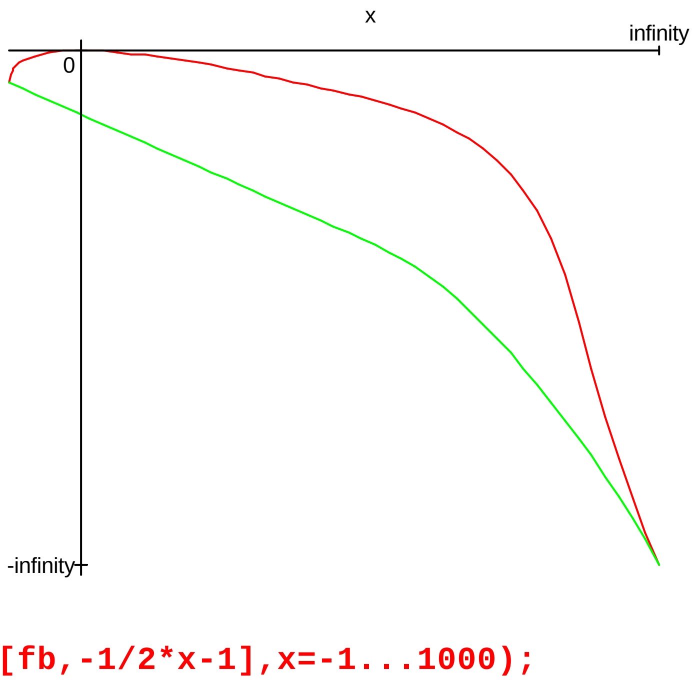
c) t=3

a)

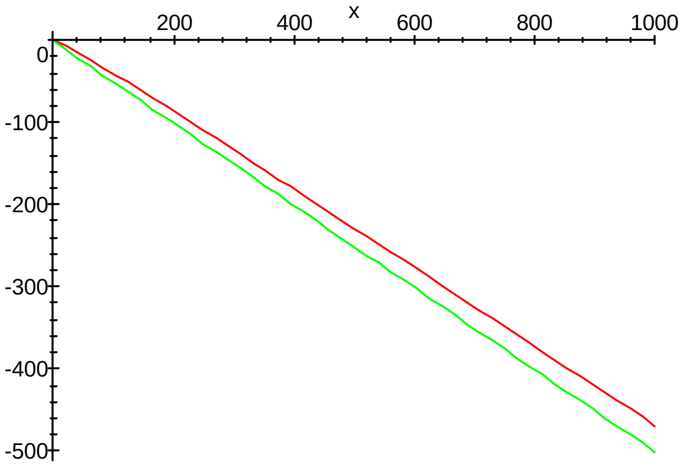
```
STUDENT > fa:=subs(t=-2,f):
STUDENT > plot(fa,x=-1...infinity);
```

b)

```
STUDENT > fb:=subs(t=1/2,f):
STUDENT > plot([fb,-1/2*x-1],x=-1...infinity);
```

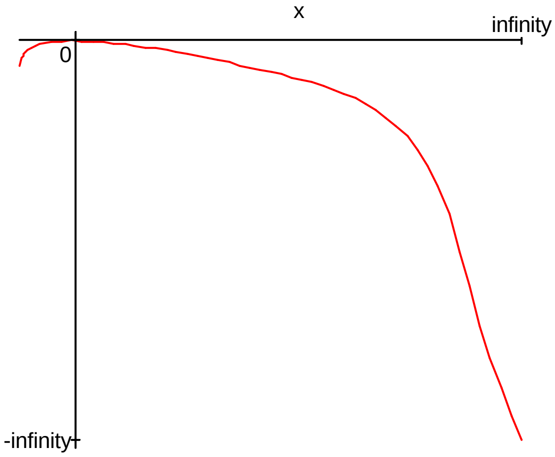



```
STUDENT > plot([fb,-1/2*x-1],x=-1...1000);
```



c)

```
STUDENT > fc:=subs(t=1/2,f):
STUDENT > plot(fc,x=-1...infinity);
STUDENT >
```




```
STUDENT >
```

Esempio 4.1

Valutazione dell'errore che si commette approssimando una funzione con il polinomio di Taylor

Vogliamo valutare l'errore quadratico medio che si compie sostituendo ad una funzione f il suo sviluppo di Taylor di ordine a in un intorno I:(c;r). Prendiamo come valori

```
STUDENT > a:=3:
STUDENT > c:=0:
STUDENT > r:=Pi/2:
STUDENT > f:=sin(x):
```

Sviluppiamo la f utilizzando il polinomio di Taylor

STUDENT > $t := \mathrm{taylor}(f, x = c, a)$

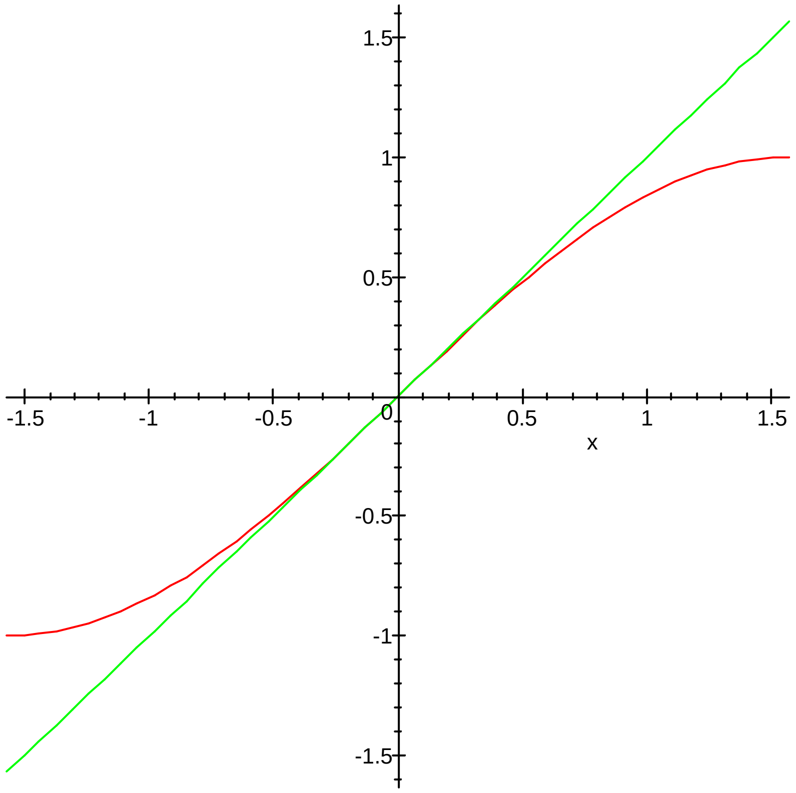
$$t := x + \mathrm{O}(x^3)$$

STUDENT > $p := \mathrm{convert}(t, polynom)$

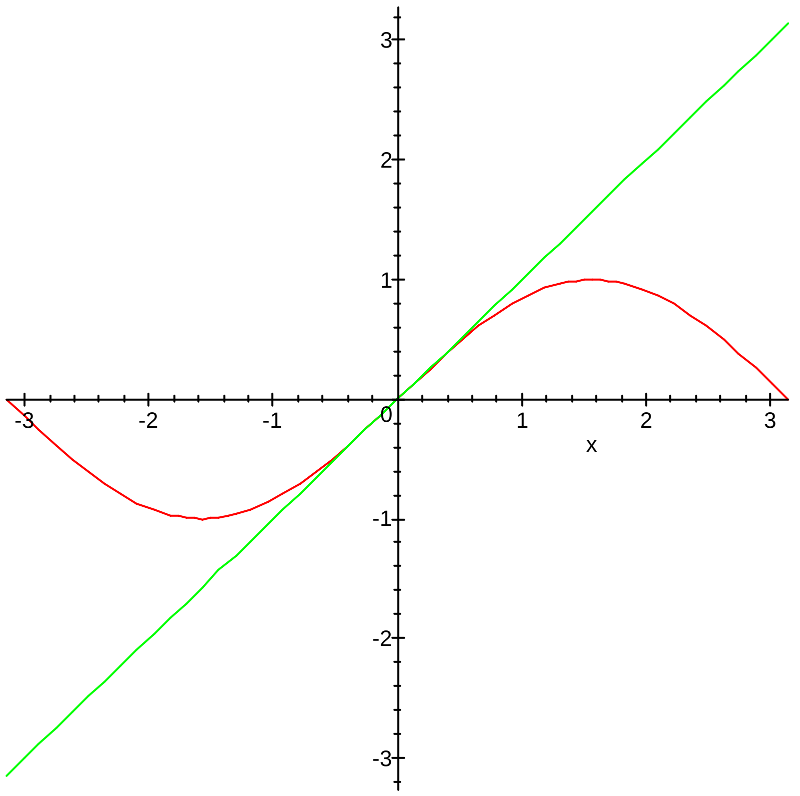
$$p := x$$

plottiamo i grafici corrispondenti alla f(x) e a p(x) (approssimazione della f(x) mediante un polinomio di Taylor di grado a)

```
STUDENT > plot([f,p],x=c-r...c+r);
```




```
STUDENT > plot([f,p],x=c-2*r...c+2*r);
```



Valutiamo gli integrale della f(x) e di p(x) su di un intorno di c (in questo caso ad una funzione dispari corrisponde un polinomio dispari e l'integrale di una funzione dispari calcolato su un intorno di x=0 è pari a zero)

```
STUDENT > ifun:=int(f,x=c-r...c+r);
```

$$ifun := 0$$

```
STUDENT > ipol:=int(p,x=c-r...c+r);
```

$$ipol := 0$$

Più significativa è la valutazione dell'errore quadratico medio che si commette

```
STUDENT > err:=int(abs(f-p),x=c-r...c+r)/(2*r);
```

$$err := \frac{\frac{1}{4}\pi^2 - 2}{\pi}$$

```
STUDENT > simplify(");
```

$$\frac{1}{4}\,\frac{\pi^2 - 8}{\pi}$$

```
STUDENT > evalf(");
```

$$.1487783913$$

Proviamo adesso ad aumentare il grado del polinomio

```
STUDENT > a:=9;
```

$$a := 9$$

```
STUDENT > c:=0;
```

$$c := 0$$

```
STUDENT > r:=Pi;
```

$$r := \pi$$

```
STUDENT > f:=sin(x);
```

$$f := \sin(x)$$

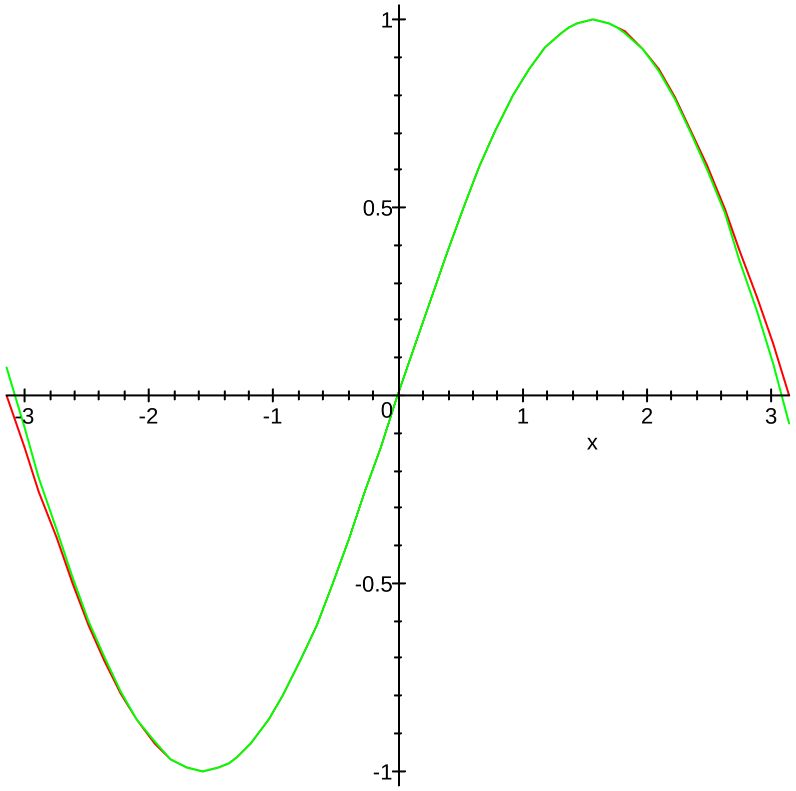
```
STUDENT > t:=taylor(f,x=c,a);
```

$$t := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + O(x^9)$$

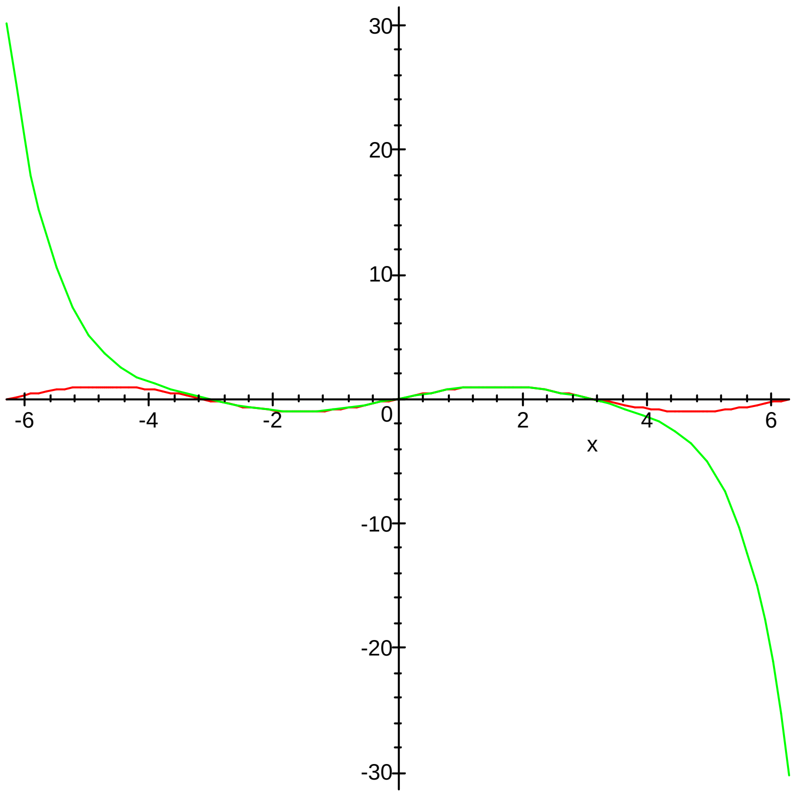
```
STUDENT > p:=convert(t,polynom);
```

$$p := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7$$

```
STUDENT > plot([f,p],x=c-r...c+r);
```




```
STUDENT > plot([f,p],x=c-2*r...c+2*r);
```



STUDENT > `ifun:=int(f,x=c-r...c+r);`

$$ifun := 0$$

STUDENT > `ipol:=int(p,x=c-r...c+r);`

$$ipol := 0$$

STUDENT > `err:=int(abs(f-p),x=c-r...c+r)/(2*r);`

$$err := \frac{1}{2} \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin(x) - x + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{120} x^5 + \frac{1}{5040} x^7 \right| dx}{\pi}$$

STUDENT > `evalf(");`

$$.007632366770$$

Confrontando questo risultato con quello ottenuto precedentemente si osserva che sviluppando fino al terzo ordine si commette un errore quadratico medio del 14,8% che si riduce al 7,6 sviluppando fino al quindo grado

STUDENT >

Esempio 5.1

CALCOLO DI INTEGRALE DEFINITO

```
STUDENT > with(student):
Warning, new definition for D
STUDENT > f:=x->(z);
```

$$f := x \to z$$

DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE

```
STUDENT > z:=-2*x^2+x+6;
```

$$z := -2\,x^2 + x + 6$$

DEFINIZIONE INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > a:=-1;b:=1;
```

$$a := -1$$

$$b := 1$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE DEFINITO ESATTO

```
STUDENT > Int(z(x),x)=int(z(x),x);
```

$$\int -2\,\mathrm{x}(x)^2 + \mathrm{x}(x) + 6\,dx = \int -2\,\mathrm{x}(x)^2 + \mathrm{x}(x) + 6\,dx$$

```
STUDENT > evalf(int(z(x),x=a..b));
```

$$10.66666667$$

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=leftsum;
```

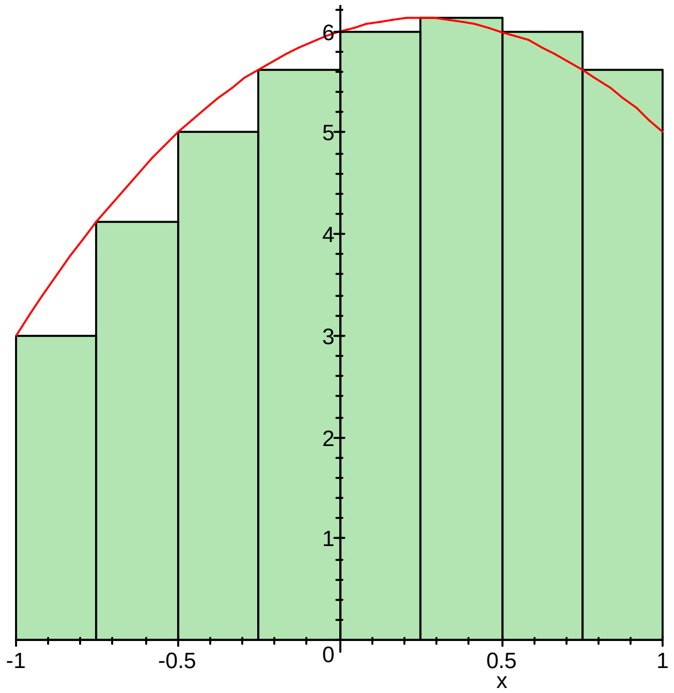
$$forma := leftsum$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > box:=leftbox;
```

$$box := leftbox$$

```
STUDENT > box(f(x),x=a..b,8);
```



CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$9.$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$10.00000000$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$10.37500000$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$10.53125000$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$10.60156250$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$10.63476563$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$10.65087891$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$10.65881348$$

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=rightsum;
```

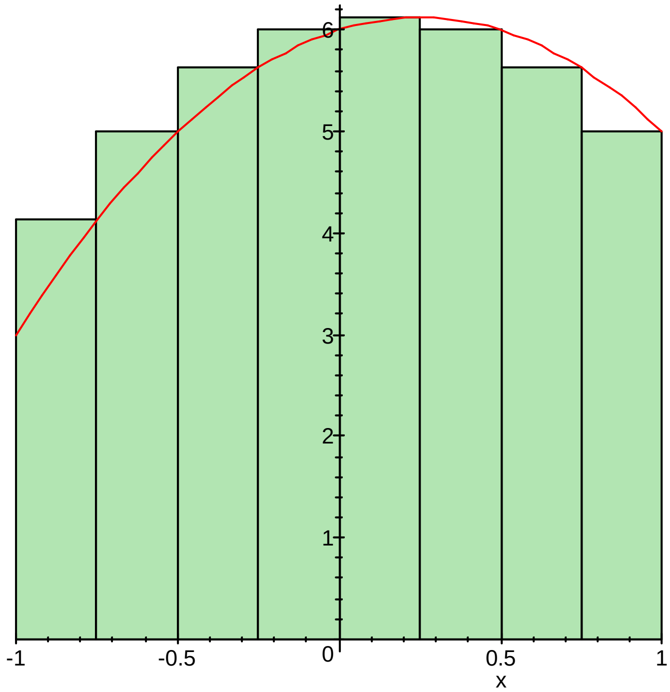
$$forma := rightsum$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > box:=rightbox;
```

$$box := rightbox$$

```
STUDENT > box(f(x),x=a..b,8);
```



CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$11.$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$11.00000000$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$10.87500000$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$10.78125000$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$10.72656250$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$10.69726563$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$10.68212891$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$10.67443848$$

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=middlesum;
```

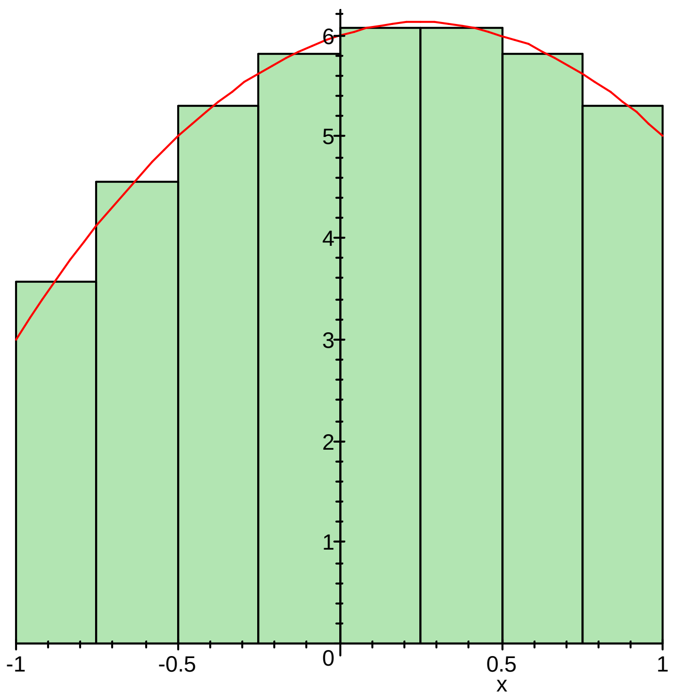
$$forma := middlesum$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > box:=middlebox;
```

$$box := middlebox$$

```
STUDENT > box(f(x),x=a..b,8);
```



CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$11.$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$10.75000000$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$10.68750000$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$10.67187500$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$10.66796875$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$10.66699219$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$10.66674805$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$10.66668701$$

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=trapezoid;
```

$$forma := trapezoid$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > forma(f(x),x=c..d,m);
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{(d-c)\left(-2\,c^2+c+12+2\left(\sum_{i=1}^{m-1}\left(-2\left(c+\frac{i\,(d-c)}{m}\right)^2+c+\frac{i\,(d-c)}{m}+6\right)\right)-2\,d^2+d\right)}{m}$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$10.$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$10.50000000$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$10.62500000$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$10.65625000$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$10.66406250$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$10.66601563$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$10.66650391$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$10.66662598$$

```
STUDENT > forma:=simpson;
```

$$forma := simpson$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > forma(f(x),x=c..d,m);
```

$$\frac{1}{3}(d-c)\left(-2\,c^2+c+12-2\,d^2+d + 4\left(\sum_{i=1}^{1/2\,m}\left(-2\left(c+\frac{(2\,i-1)\,(d-c)}{m}\right)^2+c+\frac{(2\,i-1)\,(d-c)}{m}+6\right)\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{1/2\,m-1}\left(-2\left(c+2\,\frac{i\,(d-c)}{m}\right)^2+c+2\,\frac{i\,(d-c)}{m}+6\right)\right)\right)\Big/ m$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$10.66666667$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$10.66666667$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$10.66666667$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$10.66666667$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$10.66666667$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$10.66666667$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$10.66666667$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$10.66666667$$

STUDENT >

Esempio 5.2

INTEGRAALE DEFINITO

```
STUDENT > with(student):
STUDENT > f:=x->(z);
```

$$f := x \to z$$

DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE

```
STUDENT > z:=(1/5+25*x-200*x^2+675*x^3-900*x^4+400*x^5);
```

$$z := \frac{1}{5} + 25\,x - 200\,x^2 + 675\,x^3 - 900\,x^4 + 400\,x^5$$

DEFINIZIONE INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > a:=0;b:=8/10;
```

$$a := 0$$

$$b := \frac{4}{5}$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE DEFINITO ESATTO

```
STUDENT > Int(z(x),x)=int(z(x),x);
```

$$\int \frac{1}{5} + 25\,\mathrm{x}(x) - 200\,\mathrm{x}(x)^2 + 675\,\mathrm{x}(x)^3 - 900\,\mathrm{x}(x)^4 + 400\,\mathrm{x}(x)^5\,dx =$$

$$\int \frac{1}{5} + 25\,\mathrm{x}(x) - 200\,\mathrm{x}(x)^2 + 675\,\mathrm{x}(x)^3 - 900\,\mathrm{x}(x)^4 + 400\,\mathrm{x}(x)^5\,dx$$

```
STUDENT > evalf(int(z(x),x=a..b));
```

$$1.640533333$$

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=leftsum;
```

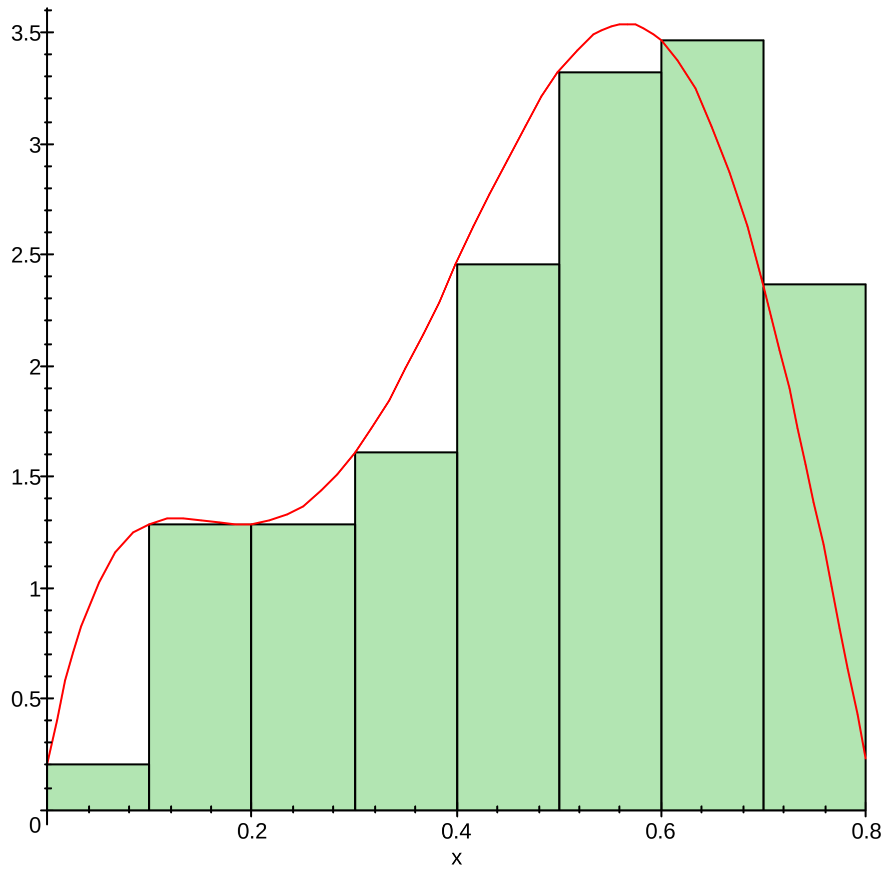
$$forma := leftsum$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > box:=leftbox;
```

$$box := leftbox$$

```
STUDENT > box(f(x),x=a..b,8);
```



CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$1.062400000$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$1.481600000$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$1.599200000$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$1.629750000$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$1.637634375$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$1.639708399$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$1.640277088$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$1.640444271$$

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=rightsum;
```

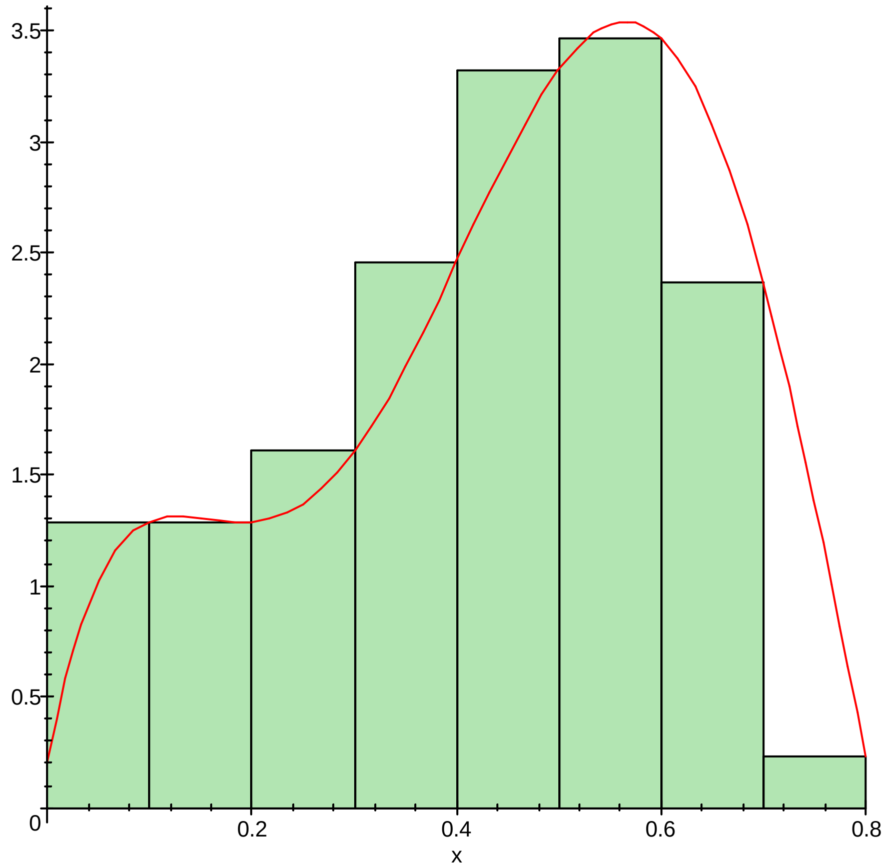
$$forma := rightsum$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > box:=rightbox;
```

$$box := rightbox$$

```
STUDENT > box(f(x),x=a..b,8);
```



CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$1.075200000$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$1.488000000$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$1.602400000$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$1.631350000$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$1.638434375$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$1.640108399$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$1.640477088$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$1.640544271$$

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=middlesum;
```

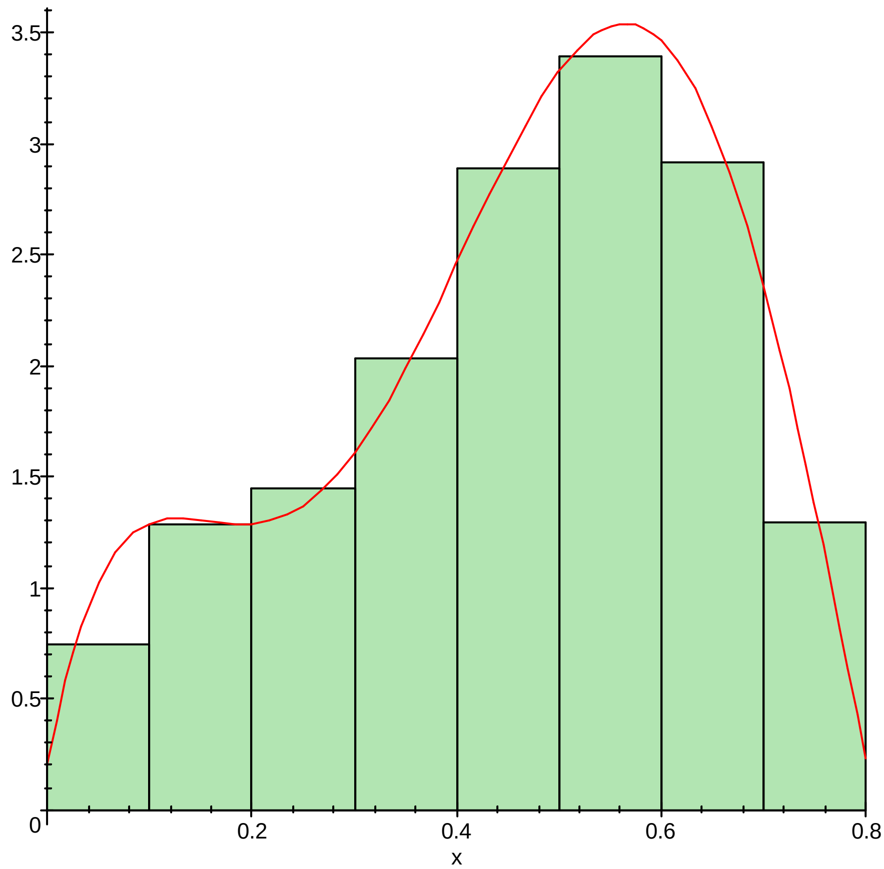
$$forma := middlesum$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > box:=middlebox;
```

$$box := middlebox$$

```
STUDENT > box(f(x),x=a..b,8);
```



CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$1.900800000$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$1.716800000$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$1.660300000$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$1.645518750$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$1.641782422$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$1.640845776$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$1.640611455$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$1.640552864$$

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=trapezoid;
```

$$forma := trapezoid$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > forma(f(x),x=c..d,m);
```

$$\frac{1}{2}(d-c)\left(\frac{2}{5}+25\,c-200\,c^2+675\,c^3-900\,c^4+400\,c^5+2\left(\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{5}+25\,c+25\,\frac{i\,(d-c)}{m}-200\left(c+\frac{i\,(d-c)}{m}\right)^2+675\left(c+\frac{i\,(d-c)}{m}\right)^3-900\left(c+\frac{i\,(d-c)}{m}\right)^4+400\left(c+\frac{i\,(d-c)}{m}\right)^5\right)\right)+25\,d-200\,d^2+675\,d^3-900\,d^4+400\,d^5\right)\Big/ m$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=1;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 1$$

$$.1728000000$$

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$1.068800000$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$1.484800000$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$1.600800000$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$1.630550000$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$1.638034375$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$1.639908399$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$1.640377088$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$1.640494271$$

```
STUDENT > forma:=simpson;
```

$$forma := simpson$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > forma(f(x),x=c..d,m);
```

$$\frac{1}{3}(d-c)\left(\frac{2}{5}+25\,c-200\,c^2+675\,c^3-900\,c^4+400\,c^5+25\,d-200\,d^2+675\,d^3-900\,d^4\right.$$
$$+400\,d^5+4\left(\sum_{i=1}^{1/2\,m}\left(\frac{1}{5}+25\,c+25\,\frac{(2\,i-1)(d-c)}{m}-200\left(c+\frac{(2\,i-1)(d-c)}{m}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+675\left(c+\frac{(2\,i-1)(d-c)}{m}\right)^3-900\left(c+\frac{(2\,i-1)(d-c)}{m}\right)^4+400\left(c+\frac{(2\,i-1)(d-c)}{m}\right)^5\right)\right.$$
$$\left.\left.\right)+2\left(\sum_{i=1}^{1/2\,m-1}\left(\frac{1}{5}+25\,c+50\,\frac{i\,(d-c)}{m}-200\left(c+2\,\frac{i\,(d-c)}{m}\right)^2+675\left(c+2\,\frac{i\,(d-c)}{m}\right)^3\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-900\left(c+2\,\frac{i\,(d-c)}{m}\right)^4+400\left(c+2\,\frac{i\,(d-c)}{m}\right)^5\right)\right)\right)/\,m$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$1.367466667$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$1.623466667$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$1.639466666$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$1.640466667$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$1.640529167$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$1.640533073$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$1.640533317$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$1.640533332$$

```
STUDENT >
```

Esempio 5.3

CALCOLO DI INTEGRALE DEFINITO

```
STUDENT > with(student):
STUDENT > f:=x->(z);
```

$$f := x \rightarrow z$$

DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE

```
STUDENT > z:=((sin(x)*x)+(sin(x)));
```

$$z := \sin(x)\, x + \sin(x)$$

DEFINIZIONE INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > a:=0;b:=(2*Pi);
```

$$a := 0$$

$$b := 2\, \pi$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE DEFINITO ESATTO

```
STUDENT > Int(z(x),x)=int(z(x),x);
```

$$\int \sin(x)(x)\, \mathrm{x}(x) + \sin(x)(x)\, dx = \int \sin(x)(x)\, \mathrm{x}(x) + \sin(x)(x)\, dx$$

```
STUDENT > evalf(int(z,x=0...2*Pi));
```

$$-6.283185308$$

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=leftsum;
```

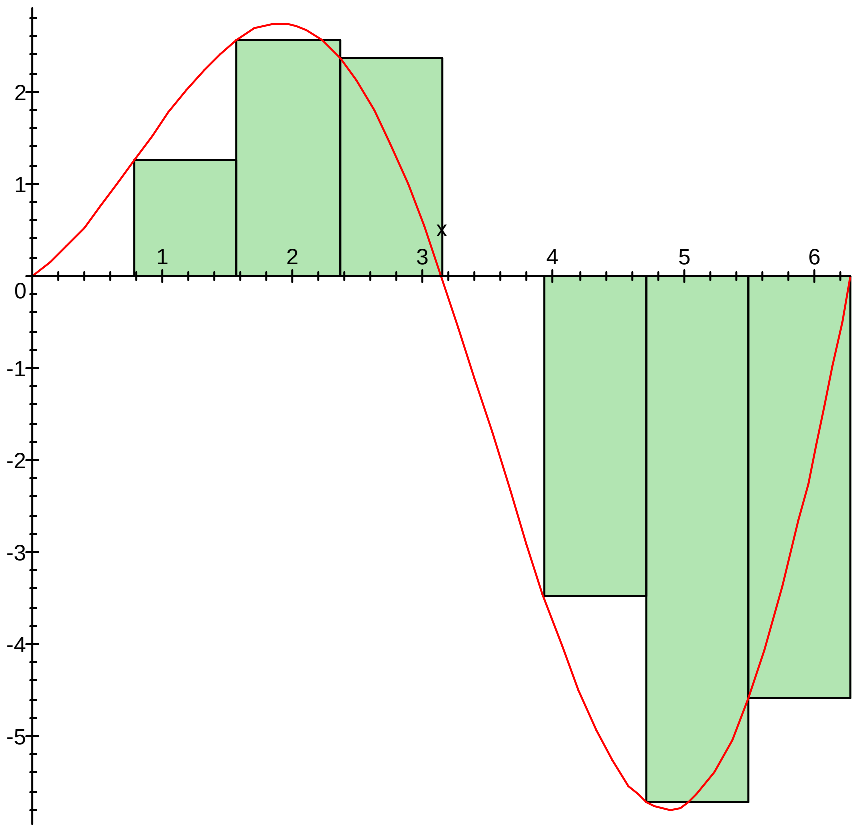
$$forma := leftsum$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > box:=leftbox;
```

$$box := leftbox$$

```
STUDENT > box(f(x),x=a..b,8);
```



CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$0$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$-4.934802202$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$-5.956833200$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$-6.202231500$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$-6.262985950$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

-6.278137903

STUDENT > `n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));`

$$n := 128$$

-6.281923609

STUDENT > `n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));`

$$n := 256$$

-6.282869892

TIPO DI REGOLA APPLICATA

STUDENT > `forma:=rightsum;`

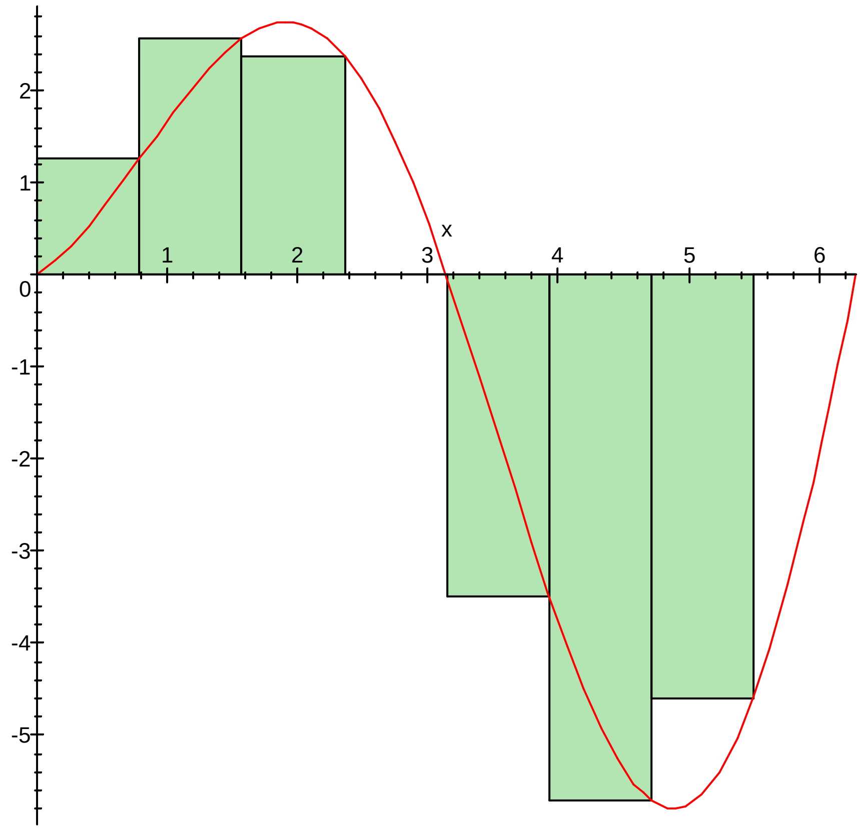
$$forma := rightsum$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

STUDENT > `box:=rightbox;`

$$box := rightbox$$

STUDENT > `box(f(x),x=a..b,8);`



CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

STUDENT > `n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));`

$$n := 2$$

0

STUDENT > `n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));`

$$n := 4$$

-4.934802202

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

-5.956833200

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

-6.202231500

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

-6.262985950

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

-6.278137903

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

-6.281923609

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

-6.282869892

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=middlesum;
```

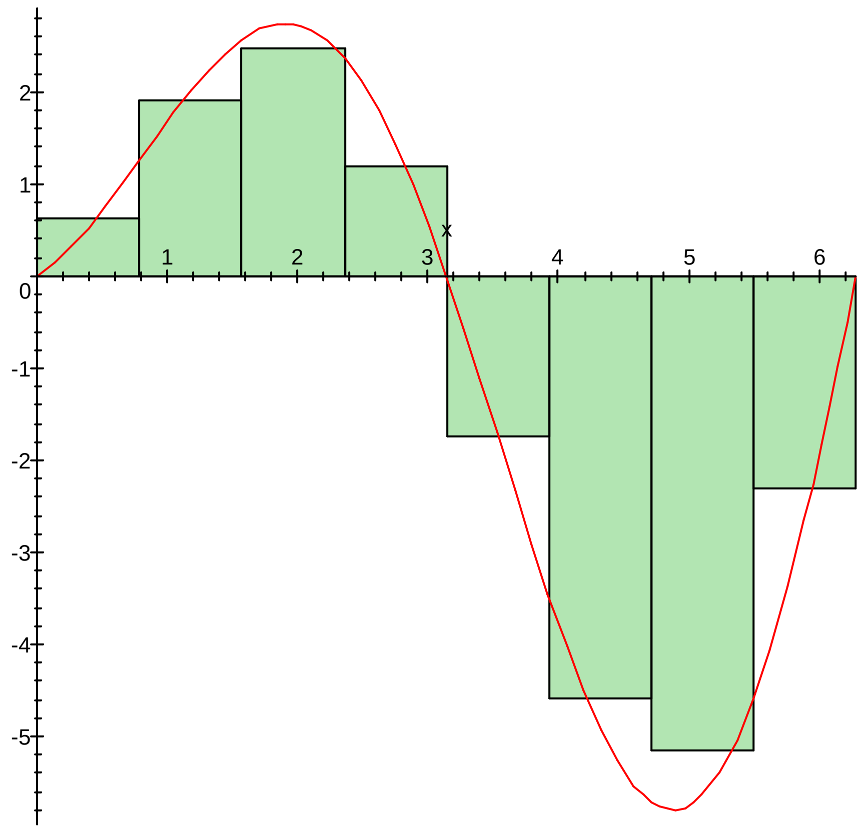
$$forma := middlesum$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > box:=middlebox;
```

$$box := middlebox$$

```
STUDENT > box(f(x),x=a..b,8);
```



CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$-9.869604404$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$-6.978864200$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$-6.447629795$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$-6.323740395$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$-6.293289856$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$-6.285709316$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$-6.283816180$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$-6.283343016$$

TIPO DI REGOLA APPLICATA

```
STUDENT > forma:=trapezoid;
```

$$forma := trapezoid$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > forma(f(x),x=c..d,m);
```

$$\frac{1}{2}(d-c)\left(\sin(c)\,c+\sin(c)+2\left(\sum_{i=1}^{m-1}\left(\sin\left(c+\frac{i\,(d-c)}{m}\right)\left(c+\frac{i\,(d-c)}{m}\right)+\sin\left(c+\frac{i\,(d-c)}{m}\right)\right)\right)+\sin(d)\,d+\sin(d)\right)/m$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$

$$0$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$

$$-4.934802202$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$

$$-5.956833200$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$

$$-6.202231500$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$

$$-6.262985950$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$

$$-6.278137903$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$

$$-6.281923609$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$

$$-6.282869892$$

```
STUDENT > forma:=simpson;
```

$$forma := simpson$$

VISUALIZZAZIONE FUNZIONE E DELLA REGOLA APPL ICATA NELL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

```
STUDENT > forma(f(x),x=c..d,m);
```

$$\frac{1}{3}(d-c)\left(\sin(c)\,c+\sin(c)+\sin(d)\,d+\sin(d)\right.$$
$$+4\left(\sum_{i=1}^{1/2\,m}\left(\sin\left(c+\frac{(2\,i-1)\,(d-c)}{m}\right)\left(c+\frac{(2\,i-1)\,(d-c)}{m}\right)+\sin\left(c+\frac{(2\,i-1)\,(d-c)}{m}\right)\right)\right)$$
$$\left.+2\left(\sum_{i=1}^{1/2\,m-1}\left(\sin\left(c+2\,\frac{i\,(d-c)}{m}\right)\left(c+2\,\frac{i\,(d-c)}{m}\right)+\sin\left(c+2\,\frac{i\,(d-c)}{m}\right)\right)\right)\right)\Big/m$$

CALCOLO DELL'INTEGRALE VARIANDO IL NUMERO DEGLI INTERVALLI

```
STUDENT > n:=2;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 2$$
$$0$$

```
STUDENT > n:=4;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 4$$
$$-6.579736273$$

```
STUDENT > n:=8;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 8$$
$$-6.297510201$$

```
STUDENT > n:=16;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 16$$
$$-6.284030930$$

```
STUDENT > n:=32;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 32$$
$$-6.283237428$$

```
STUDENT > n:=64;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 64$$
$$-6.283188556$$

```
STUDENT > n:=128;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 128$$
$$-6.283185510$$

```
STUDENT > n:=256;evalf(forma(f(x),x=a..b,n));
```

$$n := 256$$
$$-6.283185324$$

```
STUDENT >
```